Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 13

Petr Olšák

Úlohy 15.1 a, b, d, 15.3 a, b, c, 15.11 b, 16.1 a 16.5 byly probrány na cvičení ve druhém týdnu včetně (v té době) přímo vysloveného komentáře k těmto úlohám. Je tedy nadbytečné k těmto úlohám nyní znovu sepisovat komentář psaný.

15.3 e)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{b},\\ f'(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T(2\mathbf{A}^T\mathbf{A}) - 2\mathbf{b}^T\mathbf{A},\\ f''(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}. \end{aligned}$$

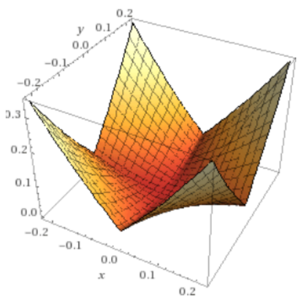
Hessova matice $2\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, podle podmínky 2. řádu je f konvexní funkce.

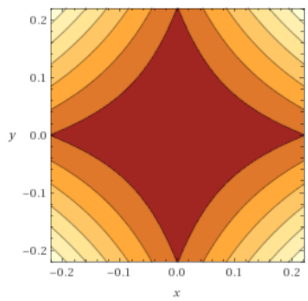
15.11 a) Funkce $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = \max_{i=1}^m \min_{j=1}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_j\|$ s proměnnými $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^k$ pro danou m-tici vektorů $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^k$ není obecně konvexní. Je určitě konvexní pro $n = 1$, protože pak to je maximum norem posunutých do bodu $\mathbf{a}_i$, přitom norma je konvexní a maximum konvexní funkce je konvexní. Pro protipříklad tedy volme $n = 2$, $m = 1$, $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$ a dimenzi prostoru $k = 1$. Funkce f pro tento případ je ve tvaru $f(x_1, x_2) = \min\{|x_1|, |x_2|\}$. Podle dovětku ke komentáři k úloze 8.4 (v plánu 07) víme, že tato funkce není konvexní.

16.4 a) $f(x) = \sqrt{|x|}$ má jediné (tj. globální) minimum v bodě 0, ale není konvexní.

16.4 b) V jedné proměnné se příklad nepodaří najít, protože spojitá funkce má v okolí svého globálního minima subkontury ve tvaru intervalu.

Ve dvou proměnných už taková funkce existuje, například $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5|xy|$. Ta má globální minimum v nule a všechny své subkontury má ve tvaru znaku čokoládoven Orion. Tento znak pochopitelně není konvexní, protože se dají spojit úsečkou jeho dva sousední vrcholy a zjevně tato úsečka celá leží mimo tento znak.





Když matematik prezentuje svůj výsledek (typicky v článku ve formátu DVD[1]), tak potřebuje prokázat, že důkazy neobsahují chyby a skutečně dokazují vyslovená tvrzení. V našem případě by tedy bylo potřebné sestavit vzorec pro obecnou subkonturu této funkce ve výšce $a > 0$, dále spojit dva vrcholy této subkontury (třeba v prvním kvadrantu) úsečkou, dále zvolit jeden bod na této úsečce (například střed) a ukázat, že leží mimo subkonturu, tedy nad hranicí subkontury, vyjádřené v prvním kvadrantu konkrétním vzorcem $y = (-5x + \sqrt{25x^2 - 4x^2 + 4a})\,/\,2$.

Jenže zvídavého člověka spíše zajímá, jak ten matematik na vzorec přišel, protože ověřování skutečností nad daným vzorcem je už docela nuda a někdy (jako v tomto případě) i dřina, přestože vše je rovnou patrné z obrázku. Matematik si svůj nápad ale často nechává pro sebe, protože to do publikovaného článku není potřeba. Já se s vámi ale o ten nápad podělím.

Subkontury funkce $x^2 + y^2$ jsou kružnice. Subkontury funkce $|x| + |y|$ jsou čtverce otočené o 45° z „normální" polohy (mahatanská norma, obrázek na straně 142 skript). Přitom tento vzorec se dá napsat taky ve tvaru $\sqrt{(|x| + |y|)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2|xy|}$. Takže i subkontury funkce $x^2 + y^2 + 2|xy|$ jsou čtverce otočené o 45°. Podařilo se mi přejít od kružnice k vepsanému čtverci přidáním členu $2|xy|$ k původnímu vzorci $x^2 + y^2$ pro kružnice. Když přidám „víc" než jen $2|xy|$, dostanu znak čokoládoven Orion.

[1] Definice-věta-důkaz