Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 12

Petr Olšák

15.1 Přechod na duální úlohu je docela názorný, pokud úlohu zapíšeme v maticovém tvaru. Řádky matice $\mathbf{A}$ rozdělíme na tři skupiny (každá může být prázdná) v závislosti na znaménku rovnosti či nerovnosti v daném řádku použitém. Podmínky (korespondující s řádky matice $\mathbf{A}$), musíme tedy seskupit do tří skupin podle typu (ne)rovnítka, třebaže jsou v zadání úlohy jinak zamíchány. Indexy těchto skupin řádků jsou ve skriptech označeny I_0, I_+, a I_-. Dále rozdělíme všechny proměnné do tří skupin podle toho, jaké na ně klademe další podmínky. Indexy těchto skupin jsou označeny J_0, J_+, J_-. Věc vypadá schematicky takto:

$$\begin{array}{c}\text{Primární úloha}\\ \min \mathbf{c}^T\mathbf{x}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\text{Duální úloha}\\ \max \mathbf{b}^T\mathbf{y}\end{array}$$

$$\begin{array}{l} I_0:\\ I_+:\\ I_-:\end{array} \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ \ge \\ \le \end{array} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b} \\ \\ \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} \\ \mathbf{y} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \ge \mathbf{0} \\ \le \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} J_0:\\ J_+:\\ J_-:\end{array} \qquad \begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \ge \mathbf{0} \\ \le \mathbf{0} \end{array} \qquad\qquad \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{A}^T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{y} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ \le \\ \ge \end{array} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{c} \\ \\ \end{bmatrix} \tag{1}$$

Modře je zakroužkovaná jistá komplikace při přechodu k duální úloze: při tomto přechodu od $\mathbf{x}$ k $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ se překlápějí nerovnítka, ale při přechodu od $\mathbf{A}\mathbf{x}$ k $\mathbf{y}$ nikoli. Dále zelenými čarami je vyznačen „přesun dat“ mezi pravými stranami podmínek a vektory účelové funkce jednotlivých úloh. Povšimněte si, že matice $\mathbf{A}$ je rozdělena na tři „sektory“ podél řádků I_0, I_+, I_- a taky na tři „sektory“ podél jejích sloupců J_0, J_+, J_-. Každý z těchto sektorů může být prázdný, ale v obecném případě tedy je matice rozdělena do devíti bloků. Schéma (1) budu dále zapisovat poněkud stručněji:

$$\text{úloha: } \min \mathbf{c}^T\mathbf{x},\ \mathbf{A}\mathbf{x} \underset{\le}{\overset{=}{\ge}} \mathbf{b},\ \mathbf{x} \underset{\le}{\overset{\circ}{\ge}} \mathbf{0} \text{ přechází na duální } \max \mathbf{b}^T\mathbf{y},\ \mathbf{y} \underset{\le}{\overset{\circ}{\ge}} \mathbf{0},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \underset{\ge}{\overset{=}{\le}} \mathbf{c}.$$

V zadání 15.1 po nás chtějí aplikovat přechod k duální úloze ještě jednou a ukázat, že se tím vrátíme k původní úloze. Zatím máme ale zaveden jen přechod od min k max a ne obráceně. Musíme tedy nejprve duální úlohu vyjádřit pomocí min a dvojího mínus. Pak můžeme aplikovat přechod:

$$\text{duální úloha: } -\min -\mathbf{b}^T\mathbf{y},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \underset{\ge}{\overset{=}{\le}} \mathbf{c},\ \mathbf{y} \underset{\le}{\overset{\circ}{\ge}} \mathbf{0} \text{ přechází na dvojí duální: } -\max \mathbf{c}^T\mathbf{z},\ \mathbf{z} \underset{\ge}{\overset{\circ}{\le}} \mathbf{0},\ \mathbf{A}\mathbf{z} \underset{\ge}{\overset{=}{\le}} -\mathbf{b}.$$

Nyní si stačí všimnout, že naposledy zapsaná úloha je při $-\mathbf{z} = \mathbf{x}$ shodná s úlohou původní, protože:

$$-\max \mathbf{c}^T\mathbf{z} \ \Leftrightarrow\ \min \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{z} \underset{\ge}{\overset{\circ}{\le}} \mathbf{0}, \ \Leftrightarrow\ -\mathbf{z} = \mathbf{x} \underset{\le}{\overset{\circ}{\ge}} \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{z} = -\mathbf{A}\mathbf{x} \underset{\ge}{\overset{=}{\le}} -\mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{x} \underset{\le}{\overset{=}{\ge}} \mathbf{b}.$$

Tím jsme dokázali tvrzení o „duálu k duálu“ zcela obecně, takže speciální případy 15.1 a) a také 15.1 b) z toho přímo plynou.

Po tomto důkazu je zřejmé, že proces dualizace můžeme v úvodním schématu (1) dělat i „zprava doleva“, tedy od max k min. Jen je třeba si uvědomit, že pravidlo překlápění nebo nepřeklápění nerovnítek je v tomto případě přesně obrácené. Kdo na to vymyslí nějakou snadno zapamatovatelnou mnemotechnickou pomůcku, co se kdy překlápí či nepřeklápí při přechodu od min k max nebo obráceně, dostane pochvalu před nastoupenou jednotkou. Já si většinou pamatuji jen schéma (1) a dále si uvědomím, zda chci dualizovat zleva doprava (min $\to$ max) nebo zprava doleva (max $\to$ min).

15.2 a) Hledáme maximum $\sum c_i\, x_i$ pro $\mathbf{x}$ ležící v hyperkrychli $\langle -1, 1\rangle^n$. Maxima dosáhneme tak, že pro $c_i < 0$ volíme $x_i = -1$ a pro $c_i > 0$ volíme $x_i = 1$. Když je náhodou $c_i = 0$, je možné volit x_i libovolně v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Stručně: $x_i = \operatorname{sgn} c_i$, maximální hodnota je $\sum c_i \operatorname{sgn} c_i = \sum |c_i|$.

15.2 b) Převedeme úlohu na maticové vyjádření a provedeme dualizaci dle schématu (1) zprava doleva.

$$
\begin{array}{cc}
\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \min \mathbf{1}^T\mathbf{y} - \mathbf{1}^T\mathbf{z} \\
\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{array}{c} \leq \\ \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{z} \leq \mathbf{0} \end{array} \\
\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n & \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 1 & & & 0 \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{2}
$$

Abychom se zbavili znaménka „mínus“ v účelové funkci duální úlohy a dvěma různým nerovnostem v podmínkách, přejmenujeme v duální úloze $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ a $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$ [Pozn.: pokud někoho zajímá, proč jsem zrovna teď prohodil pořadí písmen v abecedě, nechť se podívá na řešení této úlohy do skript; chci zachovat stejné značení.]. Lidsky zapsáno, máme tedy duální úlohu ve tvaru

$$\min \left\{ \sum v_i + \sum u_i;\ v_i \geq 0, u_i \geq 0, v_i - u_i = c_i \right\}. \tag{3}$$

Nyní provedeme požadovanou úvahu pro řešení duální úlohy (3). Ta se rozpadá na n samostatných úloh (4), protože jednotlivé proměné s různými indexy spolu nejsou provázány.

$$\min \{v_i + u_i;\ v_i \geq 0, u_i \geq 0, v_i - u_i = c_i\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Pro každé i je minimum nabýváno ve $v_i = c_i, u_i = 0$ (hodnota je c_i) nebo v $u_i = -c_i, v_i = 0$, (hodnota je $-c_i$), tedy souhrnně hodnota minima je vždy $|c_i|$ a a tuto hodnotu dosáhne buď u_i nebo v_i (v závislosti na znaménku c_i a druhá z uvedených proměnných je pak nulová. Zbývá dodat, že duální úloha (3) má optimální hodnotu rovnu $\sum |c_i|$.

15.2 c) Podmínky komplementarity přečteme z jednotlivých řádků schématu (2) s vědomím toho, že máme jiné značení $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ a $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$. Dostáváme: ($x_i = 1$ nebo $v_i = 0$); ($x_i = -1$ nebo $u_i = 0$). Řádky v druhém bloku schématu (2) žádné další podmínky nepřinášejí.

15.2 d) Pro $\mathbf{c} = (-2, 3, 4)$ je primární úloha vyřešena v bodě $\mathbf{x} = (-1, 1, 1)$ a duální úloha v bodě $\mathbf{v} = (0, 3, 4), \mathbf{u} = (2, 0, 0)$, jak plyne z předchozích úvah o řešení primární úlohy (15.2 a) a duální úlohy (15.2 b). Můžeme ověřit, že podmínky komplementarity jsou splněny: ($x_1 \neq 1$, takže musí $v_1 = 0$); ($x_2 \neq -1$, takže musí $u_2 = 0$) a ($x_3 \neq -1$, takže musí $u_3 = 0$). Nebo obrácený pohled: ($v_2 \neq 0$, takže musí $x_2 = 1$); ($v_3 \neq 0$, takže musí $x_3 = 1$) a ($u_1 \neq 0$, takže musí $x_1 = -1$). Je tedy zřejmé, že ze znalosti řešení duální úlohy dostáváme přímo z podmínek komplementarity řešení primární úlohy. Obráceně: z řešení primární úlohy dostáváme v duální úloze částečný výsledek ve formě tří nul. Zbylé hodnoty lze dopočítat z podmínek duální úlohy $v_i - u_i = c_i$.

15.3 a)

Primární úloha:	Duální úloha:	Podmínky komplementarity:
$\min 2x_1 - 3x_3 + x_4$	$\max 0y_1 + 5y_2 + 6y_3$	
$x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_1\,(x_1 - x_2 - x_3) = 0$
$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5$	$y_2 \leq 0$	$y_2\,(-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5) = 0$
$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$	$y_3 \in \mathbb{R}$	$---$
$x_1 \geq 0$	$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2$	$x_1\,(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) = 0$
$x_2 \geq 0$	$-y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 0$	$x_2\,(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$
$x_3 \geq 0$	$-y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3$	$x_3\,(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) = 0$
$x_4 \geq 0$	$2y_3 \leq 1$	$x_4\,(2y_3 - 1) = 0$

15.3 b) Úlohu $\min_x\{\max_i |a_i - x|\}$ převedeme známým trikem s proměnnou z na úlohu LP:

$$\min\{z;\ \ z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, z \geq a_i - x, z \geq x - a_i\}.$$

V posledních dvou nerovnostech převedeme proměnné na levou stranu: $z+x \geq a_i$, $z-x \geq -a_i$. Přeformulujeme úlohu do maticového vyjádření a najdeme úlohu duální.

primární úloha

$$\min 0x + 1z$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}$$

duální úloha

$$\max \mathbf{a}^T\mathbf{u} - \mathbf{a}^T\mathbf{v}$$

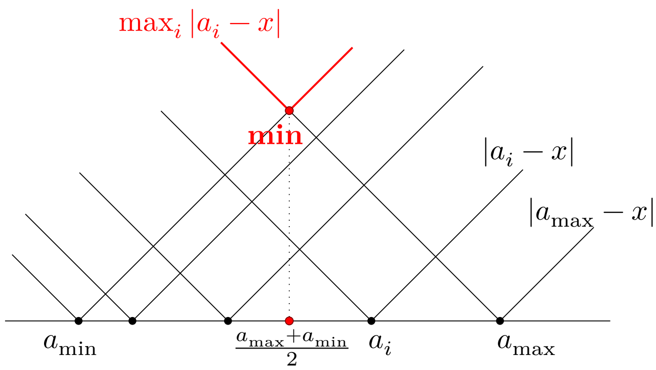
$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lidsky řečeno, duální úloha zní: $\max\{\mathbf{a}^T\mathbf{u} - \mathbf{a}^T\mathbf{v};\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \sum u_i + \sum v_i = 1,\ \sum u_i = \sum v_i\}$. Povšimněte si, že z posledních dvou podmínek plyne také rovnou, že $\sum u_i = \sum v_i = \frac{1}{2}$.

Podmínky komplementarity jsou: ($z = a_i - x$ nebo $u_i = 0$); ($z = x - a_i$ nebo $v_i = 0$).

Duální úloha nám připomíná úlohu ze cvičení 11.3 c). Je-li I index, pro který je a_I maximální a J index, pro který je a_J minimální, pak volme $u_I = \frac{1}{2}$ a ostatní nulové, dále $v_J = \frac{1}{2}$ a ostatní nulové. To maximalizuje účelovou funkci duální úlohy za splnění všech podmínek. Účelová funkce má hodnotu $(a_I - a_J)/2$. Ilustrovat to můžeme situací, že potřebujeme nakoupit a prodat zboží o celkovém množství 1 (nákup v množství $\frac{1}{2}$, prodej také v množství $\frac{1}{2}$). Jednotliví obchodníci nabízejí své výkupní/prodejní ceny a_i. Prodáme u obchodníka s cenou a_I celou povolenou polovinu a nakoupíme taktéž polovinu u obchodníka s cenou a_J. To maximalizuje náš zisk. Z podmínek komplementarity pak plyne, že $z = a_I - x$ a současně $z = x - a_J$, sečtením těchto dvou rovností znovu dostáváme optimální hodnotu účelové funkce $z = (a_I - a_J)/2$. Optimální hodnota proměnné x je v této úloze $(a_I + a_J)/2$, tedy střed nejmenšího intervalu v $\mathbb{R}$, který obsahuje všechny a_i.



Toto cvičení ukazuje, že vzájemně duální úlohy popisují zcela jiný charakter problému, u každé z nich je třeba vést naprosto odlišnou úvahu (v případě řešení úvahou). V prvém případě hledáme střed intervalu na reálné ose (viz obrázek) a v druhém maximální zisk při prodeji a zároveň koupi stejného množství zboží. Obrázek ukazuje, jakou úvahou lze k výsledku primární úlohy přijít bez přechodu k duální. Na obrázku máme reálnou osu a na ní jednotlivé body a_i. Dále tam jsou grafy jednotlivých funkcí $|a_i - x|$ a červeně je vyznačen graf funkce $\max |a_i - x|$. Této funkce se hledá minimum, jehož x-ová souřadnice je skutečně ve středu intervalu $\langle a_{\min}, a_{\max}\rangle$.

15.3 e) Ukážu jen cvičení 12.3 c), d) a e), tedy navážu na tytéž vybrané příklady, jaké byly zahrnuty do plánu cvičení 10. Nebudu už vykreslovat schémátka přechodu na duální úlohu, protože je to v TEXu přeci jen poněkud náročné a vy už přechody k duální úloze jistě umíte (z předchozích cvičení). Všimněte si, že se ve cvičení 12.3 přechází od maxima k minimu, takže je třeba použít arabský způsob čtení schématu (1), tj. zprava doleva.

Duální úloha k **12.3 c)** zní $\min\{y;\ y \in \mathbb{R},\ y\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$, tedy $y \geq c_i\ \forall i$. Z toho je okamžitě vidět, že nejlepší řešení je $y = \max c_i$. Podmínky komplementarity: $x_i = 0$ nebo $y = c_i$. Je to n podmínek, pro každé i je vyslovena jedna podmínka komplementarity.

Duální úloha k **12.3 d)** zní $\min\{y;\ y \geq 0,\ y\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$, tedy k úloze z předchozího cvičení je přidáno $y \geq 0$. Vidíme, že jsou-li všechna c_i záporná, je nejlepší řešení $y = 0$, jinak je nejlepší řešení $y = \max c_i$. Podmínky komplementarity: $x_i = 0$ nebo $y = c_i$ a dále $\sum x_i = 1$ nebo $y = 0$.

Duální úloha k **12.3 e)** zní $\min\{y - z;\ y \geq 0,\ z \leq 0, y\mathbf{1} + z\mathbf{1} = \mathbf{c}\}$. Poslední podmínka rozepsána do složek říká $y + z = c_i\ \forall i$. Takovou soustavu je možné splnit jen když se všechny c_i

rovnají. Nerovnají-li se, pak máme prázdnou množinu přípustných řešení, což odpovídá neomezenému řešení primární úlohy. Podmínky komplementarity: ($\sum x_i = 1$ nebo $y = 0$); ($\sum x_i = -1$ nebo $z = 0$).

15.4 Zapíšu primární a sestavím duální úlohu:

$$\min\,[47 \quad 93 \quad 17 \quad -93]\,\mathbf{x} \qquad\qquad \max\,[-3 \quad 5 \quad -8 \quad -7 \quad 4]\,\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \le \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{y} \le 0$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \qquad\qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 3 & -11 & 6 \\ 1 & 7 & -10 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{bmatrix}$$

Podmínky komplementarity napíšu a rovnou ověřím, která z nich platí pro $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$. Ty, které jsou splněny, obarvím zeleně. K ověření mi stačí počítání na prstech (součet čísel).

$$\begin{aligned}
[-1 \quad -6 \quad 1 \quad 3]\,\mathbf{x} = -3 \quad &\text{nebo} \quad y_1 = 0, \\
[-1 \quad -2 \quad 7 \quad 1]\,\mathbf{x} = 5 \quad &\text{nebo} \quad y_2 = 0, \\
[0 \quad 3 \quad -10 \quad -1]\,\mathbf{x} = -8 \quad &\text{nebo} \quad y_3 = 0, \\
[-6 \quad -11 \quad -2 \quad 12]\,\mathbf{x} = -7 \quad &\text{nebo} \quad y_4 = 0, \\
[1 \quad 6 \quad -1 \quad -3]\,\mathbf{x} = 4 \quad &\text{nebo} \quad y_5 = 0.
\end{aligned}$$

Je vidět, že pro $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ není splněna jen levá část poslední podmínky, takže musí nutně být $y_5 = 0$. Po dosazení této skutečnosti do soustavy rovnic s proměnnými y_i v duální úloze máme soustavu se čtvercovou maticí a s proměnnými y_1, y_2, y_3, y_4. Řešení této soustavy se na prstech počítá už poněkud hůře, osobně jsem použil komp: $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$.

Jak vypadají hodnoty účelové funkce v těchto bodech?

$$[47 \quad 93 \quad 17 \quad -93]\,\mathbf{x} = 64, \qquad [-3 \quad 5 \quad -8 \quad -7 \quad 4]\,\mathbf{y} = 64.$$

Jsou stejné, tj. oba vektory $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ a $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$ jsou argumenty optima své úlohy a optimální hodnota obou úloh je 2^6. „Certifikát optimality“ je ověřen.