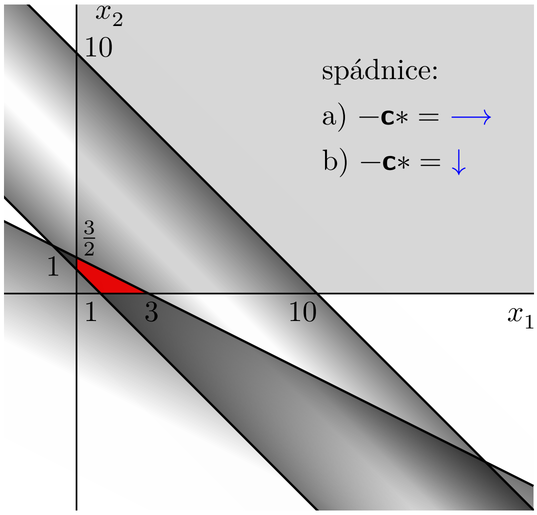
# Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 10

*Petr Olšák*

**12.1** Máme tři proměnné, první dvě jsou použity v nerovnostech, jejich vymezení lze nakreslit do 2D obrázku. Průnik všech pěti polorovin vymezených nerovnostmi (tři zapsané zvlášť a dále první kvadrant $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$) je na obrázku vyznačen červeně. Pokud by někoho zajímalo, jak pohodlně přijít na polohu těch přímek: v každé nerovnosti nejprve položím $x_1 = 0$ a spočítám $x_2$ jakoby to byla rovnost. Dostanu průsečík s osou $x_2$. Pak položím $x_2 = 0$ a spočítám $x_1$ a dostanu průsečík s osou $x_1$. Mám dva body, proložím je přímkou. Příslušná polorovina (nahoru nebo dolu od přímky) vyplyne z orientace menšítka v nerovnosti.




Nyní si do obrázku nakreslíme $-\mathbf{c}*$, kde $\mathbf{c}*$ přebírá jen první dvě souřadnice vektoru $\mathbf{c}$. Vektor $-\mathbf{c}*$ je směr největšího klesání účelové funkce v prvních dvou souřadnicích, neboť to je mínus gradient. Vydáme-li se v červené oblasti tímto směrem největšího klesání, narazíme v případě a) na bod $[3, 0]$. Dobrá je představa sáňkaře na oplocené sjezdovce, který má dány mantinely sjezdovky a její spádnici. Kam dosáňkuje? Protože třetí souřadnice vektoru $-\mathbf{c}$ je v případě a) záporná, v rámci 3D obrázku je minimum pro případ $x_3 = 0$. V případě b) sáňkař dosáňkuje do nějakého bodu k mantinelu $x_1 \in \langle 1, 3\rangle$ a $x_2 = 0$. Protože třetí souřadnice vektoru $-\mathbf{c}$ je v případě b) nulová, minimum je stejné pro všechny body $x_1 \in \langle 1, 3\rangle, x_2 = 0, x_3 \in \langle 0, \infty)$. V případě c) na poloze bodu (sáněk) v červené oblasti nezáleží a ve směru $x_3$ se celkové minimum vylepšuje, kdykoli zvětšíme $x_3$, takže úloha je neomezená.

**12.2 a)** Pro odstranění nerovností přidáme slackové proměnné $u \ge 0, v \ge 0$:

$$\begin{aligned} \min\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ x_1 - \ x_2 - \ x_3 - \ u &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ v &= 5 \\ 2x_1 - \ x_2 - \ x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, u, v &\ge 0 \end{aligned}$$

a tuto soustavu podmínek zapíšeme maticově:

$$\min \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**12.2 b)** Lineární program (12.11) je dopravní úloha. Proměnné jsou soustředěny do matice s $m$ řádky a $n$ sloupci, jejich součet se má minimalizovat, ale ne přímo: každá proměnná je v tomto součtu pronásobena vahou $c_{ij}$. Ve formulaci úlohy indexy $i$ značí řádky uvedené matice a indexy $j$ sloupce. Podmínka (12.11b) říká, že přímý součet (bez váhy) proměnných $x_{ij}$ v každém řádku matice proměnných se má rovnat číslu $a_i$. Podmínka (12.11c) říká, že přímý součet proměnných v každém sloupci se má rovnat $b_j$. Pro přepsání úlohy do maticového vyjádření zahrneme všechny proměnné do jednoho vektoru $\mathbf{u}$ tak, že je postupně všechny přečteme po řádcích a výsledný vektor napíšeme do sloupce: $\mathbf{u} = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}]^T$.

Nyní se zamyslíme nad tím, co přesně dělá první podmínka: součet proměnných v prvním řádku se má rovnat $a_1$. Tj. je třeba nashromáždit jedničky k proměnným prvního řádku a k ostatním nuly. To zařídí první řádek matice uvedené v rovnici (A). Druhý řádek zařídí splnění druhé z podmínek z (12.11b), atd., až (vizuálně) předposlední řádek zařídí splnění poslední podmínky z (12.11b). Ovšem (vizuálně) poslední řádek matice v rovnici (A) se fakticky skládá z dalších $n$ řádků a když si pořádně rozmyslíte, co dělají jednotlivé řádky (rozepište si aspoň myšlenkově ty jednotkové matice do sady jedniček na diagonálách), tak zjistíte, že tyto řádky přesně korespondují s $n$ podmínkami z (12.11c).

$$\begin{array}{c} \\ m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n\{ \end{array}\left[\begin{array}{cccc} \overbrace{\mathbf{1}^T}^{n} & \overbrace{\mathbf{0}^T}^{n} & \dots & \overbrace{\mathbf{0}^T}^{n} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \dots & \mathbf{I}_n \end{array}\right]\mathbf{u} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \\ \\ \\ \mathbf{b} \end{array}\right] \tag{A}$$

Řešení úlohy tedy zní: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{u};\ \text{za podmínky (A)}\}$.

**12.3 c)** Představme si, že máme hmotu o celkové hmotnosti 1 rozdělit do $n$ proměnných $x_i$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, tak, abychom navážili co nejvíce. Přitom každá proměnná má svůj koeficient váhy $c_i$, který tu hmotu násobí. Z představy vyplývá, že stačí nashromáždit veškerou hmotu do takové proměnné, která má největší koeficient váhy, a ostatní proměnné utřou nos, tj. zůstanou nulové. Nebo nabídnu představu ještě více ze života: máte $n$ obchodníků, kteří vám nabízejí za jednotku Vaši hmoty $c_i$ peněz. Co říká zákon trhu, ke kterému obchodníkovi půjdete svou hmotu prodat? Přesnou matematickou argumentaci této představy jsem ukazoval na cvičení v době, kdy jsme se ještě mohli vídat. Kdyby existovalo více indexů s největším $c_i$, pak odpovídajícím proměnným s těmito indexy můžeme rozdělit celkovou hmotu libovolně, celkový výsledek účelové funkce se v takovém případě nemění. Podmínka na sumu $x_i$ v této úloze obsahuje nerovnost, tedy hmotu nemusíme spotřebovat celou. To uděláme právě tehdy, když všechna $c_i$ jsou záporná, pak volíme všechna $x_i$ nulová a hmotu nespotřebujeme vůbec. Pokud ale aspoň jedno $c_i$ je kladné, veškerou hmotu soustředíme k největšímu $c_i$.

**12.3 d)** Jsou-li si vzájemně všechna $c_i$ rovna, pak účelová funkce je rovna $c_1 \sum_{i=1}^n x_i$ a tu sumu máme v podmínce omezenu rozsahem $\langle -1, 1 \rangle$. Tj. při $c_1 > 0$ je maximum v libovolném bodě $\mathbf{x}$, pro který je ta suma rovna jedné a hodnota maxima je $c_1$. Při $c_1 < 0$ je maximum v libovolném bodě, pro který je ta suma rovna $-1$ a hodnota maxima je rovna $|c_1|$. Zamyslíme se nad posledním případem. Nechť se $c_i$ vzájemně nerovnají, tj. aspoň ve dvou indexech se liší. BÚNO (bez újmy na obecnosti) předpokládejme $c_1 > c_2$. Volme $x_1 = t, x_2 = -t$ pro $t \in \mathbb{R}$, $x_j = 0$ pro $j > 2$. To vyhovuje podmínkám úlohy. V těchto bodech má účelová funkce hodnotu $c_1 t + c_2(-t) = (c_1 - c_2)t$. Vidíme, že pro $t \to \infty$ je hodnota účelové funkce neomezená. Úloha je tedy neomezená.

**12.3 e)** Jako 12.3 c) jen s tím rozdílem, že vždy spotřebujeme hmotu o celkové hmotnosti $k$.

**12.4 a)** V souladu se sekcí 12.1.1 skript zavedeme proměnou $z$ (kterou v sekci 12.1.1 nazývají $y$) s vlastností, že $z \geq f$, kde $f$ je konvexní po částech lineární účelová funkce původní úlohy, která se má minimalizovat. Místo účelové funkce pak minimalizujeme $z$. Požadavek minima zajistí, že nebude v bodě minima $z > f$, protože by se očividně dalo zmenšit. Nastane tedy rovnost $z = f$. Pointa tohoto triku je v tom, že nová účelová funkce je lineární (v proměnné $z$), zatímco původní účelová funkce lineární nebyla a nedala se přímo použít v algoritmech na řešení úloh lineárního programování. Jednotlivé „body zlomu“ původní účelové funkce jsme přestěhovali do okrajových podmínek úlohy. V naší konkrétní úloze máme součet dvou konvexních funkcí $|x_1|$ a $|x_2|$, použijeme tedy součet dvou proměnných $z_1 \geq |x_1|$ a $z_2 \geq |x_2|$. Dostáváme

$$\min\{z_1 + z_2;\ x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; z_1 \geq x_1; z_1 \geq -x_1; z_2 \geq x_2; z_2 \geq -x_2; 2x_1 - x_2 \geq 1; -x_1 + 2x_2 \geq 1\}$$

Je třeba si uvědomit, že když $z_1 \geq |x_1|$, pak je to to ekvivalentní s $z_1 \geq \max\{x_1, -x_1\}$ a to je ekvivalentní s $z_1 \geq x_1, z_1 \geq -x_1$. Analogicky to platí i pro $z_2$.

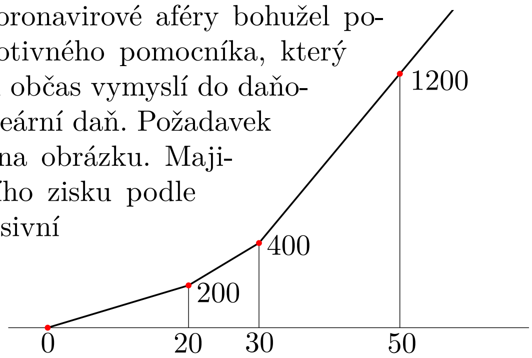
**12.4 c)** Tady jde jen o to rozepsat absolutní hodnotu do dvou sad nerovností:

$$\max\left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; -1 \leq \mathbf{d}^T\mathbf{x} \leq 1; \mathbf{x} \geq 0\right\}$$

**12.4 f)** Protože je $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max|u_i|$, je $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq 1$ ekvivalentní s $|u_i| \leq 1$ pro všechna $i$, tj. $-1 \leq u_i \leq 1$ pro všechna $i$, neboli $-\mathbf{1} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1}$. Zadanou úlohu tedy přepíšeme snadno:

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ -\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{1}\,\}.$$

**12.8** Podíváme se na kioskáře, který má nyní v období koronavirové aféry bohužel poněkud omezený svůj byznys. Přesto má v kiosku protivného pomocníka, který žádá progresivní mzdu, podobně jako naši zákonodárci občas vymyslí do daňového zákona č. 586/1992 Sb. progresivní po částech lineární daň. Požadavek pomocníka je vyjádřen po částech lineární funkcí $f$ na obrázku. Majitel kiosku chce maximalizovat zisk ve tvaru původního zisku podle řešeného příkladu 1.12 mínus ztráty způsobené progresivní mzdou pomocníkovi. Takže jeho úloha zní:




$$\max\{\, 120\,l + 76\,h - f\,\}$$

kde $f$ je na obrázku vyjádřená v proměnné $x = l + h$, tedy

$$f(l+h) = \max\{10\,(l+h), 20\,(l+h) - 200, 40\,(l+h) - 800\}$$

Je třeba zavést pomocnou proměnou $z$ jako v příkladu 11.4 a), abychom měli účelovou funkci lineární a po částech lineární požadavky pomocníka převedli do okrajových podmínek. Je

$$z \geq f, \quad \text{tj.} \quad z \geq 10\,(l+h);\ z \geq 20\,(l+h) - 200;\ z \geq 40\,(l+h) - 800.$$

Úloha lineárního programování i s přidáním podmínek z řešené části tedy zní:

$$\max\{\, 120\,l + 76\,h - z;\ z \geq 10\,(l+h);\ z \geq 20\,(l+h) - 200;\ z \geq 40\,(l+h) - 800;$$
$$2\,l + 1{,}5\,h \leq 100;\ 0{,}4\,l + 0{,}2\,h \leq 16;\ l, h \geq 0\,\}$$

Je třeba si uvědomit, že **max**imalizujeme účelovou funkci, ve které se vyskytuje $-z$, takže v rámci toho se $z$ **min**imalizuje. To znamená, že při $z > f$ ještě není dosaženo minima $z$ a tedy v optimálním řešení bude $z = f$.

**12.9** Armáda má svá množství střeliva a požadavky střelnic zanesené do tabulky, ve které $x_i$ značí jednotlivý převoz od příslušného skladu k příslušné střelnici.

| střelnice: | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| (6) sklad A | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| (5) sklad B | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| požadavek: | (3) | (2) | (2) |

Mentálně trošičku náročnější může být reformulace úlohy ze slovního vyjádření „je nutné minimalizovat maximální množství převáženého střeliva“ do optimalizační úlohy, která tedy zní:

$$\min\{\, \max x_i;\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6;\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 5;\ x_1 + x_4 = 3;\ x_2 + x_5 = 2;\ x_3 + x_6 = 2\,\}$$

Toto převedeme trikem popsaným v řešení cvičení 11.4 a) na úlohu LP:

$$\min\{\, z;\ z \geq x_i\ \forall i;\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6;\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 5;\ x_1 + x_4 = 3;\ x_2 + x_5 = 2;\ x_3 + x_6 = 2\,\}$$

$$= \min\left\{ z;\ z\mathbf{1} \geq \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6; z \in \mathbb{R}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$