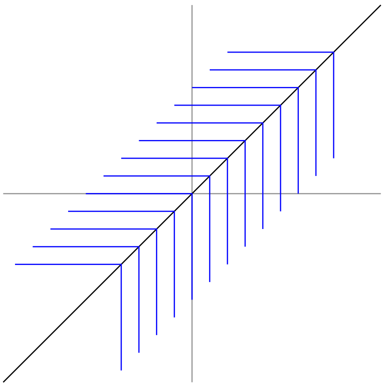
Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 07

Petr Olšák

8.4 Funkce $\max(x,y)$ se chová jako x při $x>y$, chová se jako y při $x<y$. V těchto případech je možné najít okolí bodu (x,y) ve kterém se funkce chová pořád jako x (v prvním případě) nebo jako y ve druhém. Takže v těchto případech je funkce diferencovatelná, protože $f(x,y)=x$ je diferencovatelná a stejně tak $f(x,y)=y$. Ovšem v případě, když $x=y$, pak tímto bodem (x_0,x_0) můžeme proložit třeba přímku rovnoběžnou s osou x a sledovat funkční hodnoty na této přímce, tedy hodnoty $\max(x,x_0)$. Ty jsou konstantní a rovny x_0 pro $x\le x_0$, ale pro $x>x_0$ je $\max(x,x_0)=x$. Takže parciální derivace v bodě (x_0,x_0) zleva je nula a zprava je rovna jedné, tedy celkově $\frac{\partial}{\partial x}$ neexistuje. V bodech $y=x$ tedy funkce není diferencovatelná. V náčrtku jsou vyznačeny vrstevnice grafu této funkce. Na hraně $y=x$ je „údolí“, například (je-li to mapa něčeho), tak tam může téct potůček směrem jihozápadním.



Kdybychom vyšetřovali naopak $\min(x,y)$, pak v místech $y=x$ máme „ostrý horský hřeben“. Zkuste si načrtnout vrstevnice této funkce.

8.5 Obecně Jacobiho matice f' pro funkci f je rovna jednořádkové matici $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$ Je-li $\mathbf{f}$ zobrazení, pak je $\mathbf{f}'$ rovna matici obsahující v řádcích Jacobiho matice jednotlivých složek zobrazení. Při výpočtech derivací se zbytečně nenořte do jednotlivých parciálních derivací a využijte pravidla shrnutá v tabulkách na straně 117 skript.

1. $f'=[2x]$. **2.** $f'=[2x,\ -2y]$. **3.** $f'=[0\ 0\ldots\ 0]$. **4.** $f'=[1\ 0\ldots\ 0]$. **5, 6.** $f'=\mathbf{a}^T$. **7.** $f'=-2\,e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\,\mathbf{x}^T$. **8.** $f'=\mathbf{e}_i^T$, kde i je složka s největší hodnotou. Je-li takových složek více, derivace není definovaná, viz též cvičení 8.4. **9.** $f'=[-\sin t\ \ \cos t]^T$. **10.** $f'=[-\sin t\ \ \cos t\ \ a]^T$. **11.** $f'=\mathbf{v}$. **12.** $f'=\mathbf{I}$. **13.** $f'=\mathbf{O}$. **14, 15.** $f'=\mathbf{A}$. **16.**:

$$f'=\begin{bmatrix} -(R+r\,\cos v)\,\sin u & -r\,\sin v\,\cos u \\ (R+r\,\cos v)\,\cos u & -r\,\sin v\,\sin u \\ 0 & r\,\cos v \end{bmatrix}$$

17, 18, 19. Jde o matici parciálních derivací funkce f nebo zobrazení $\mathbf{f}$ daných rozměrů.

8.6 a) Hledaná derivace je

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi,\quad -\frac{\partial f}{\partial x}\cdot r\,\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\,\cos\varphi\right]$$

Ve vzorci není uvedeno, ve kterém bodě se parciální derivace funkce f vyhodnocuje. Měli bychom to uvést za každým výrazem typu $\frac{\partial f}{\partial x}$ ještě před tím, než následuje násobení. Vyhodnocovaným bodem je bod $(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, takže například první sčítanec výsledku kompletně zapsaný v nových proměnných zní $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi$. Protože se to stává docela nepřehledným, vyhodnocovaný bod se ve výpočtech často vynechává (ale musíme vždy vědět, že tam je).

Když označíme $\mathbf{g}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ takové zobrazení, že $\mathbf{g}(r,\varphi)=[r\,\cos\varphi\ \ r\,\sin\varphi]^T$, pak $f'\in\mathbb{R}^{1\times2}$, $\mathbf{g}'\in\mathbb{R}^{2\times2}$ a derivace složené funkce v proměnných r,φ je součinem těchto matic $f'\,\mathbf{g}'$.

8.8 Nejprve odvodíme třetí vzorec z první tabulky na str. 117 skript a dále poslední vzorec druhé tabulky z téže strany. Můžete těm vzorcům věřit a ušetřit si dost značné intelektuální úsilí, tj. přeskočit následující text až po symbol ▶ při levém okraji. Nebo naopak se můžete ponořit do jednotlivých parciálních derivací při odvozování těch vzorců, ale to bývá dost namáhavé.

Třetí vzorec z první tabulky skript si odvodíme tak, že si jej nejprve zjednodušíme. Nechť má v tom vzorci zobrazení $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ jedinou proměnou t. Chceme dokázat, že $(\mathbf{A}\,\mathbf{g}(t))' = \mathbf{A}\,\mathbf{g}'(t)$. Matici $\mathbf{A}$ rozepíšeme do sloupců $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_l]$. Pak

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{g}(t))' = (\mathbf{a}_1\, g_1(t) + \mathbf{a}_2\, g_2(t) + \cdots + \mathbf{a}_l\, g_l(t))' = \mathbf{a}_1\, g_1'(t) + \mathbf{a}_2\, g_2'(t) + \cdots + \mathbf{a}_l\, g_l'(t) = (\mathbf{A}\,\mathbf{g}'(t))$$

V případě, že má funkce $\mathbf{g}$ více proměnných, pak místo výrazů $g_i'(t)$ (což jsou čísla) je třeba psát $g_i'(\mathbf{x})$ (což jsou jednořádkové matice délky n) a součin $\mathbf{a}_i\, g_i'(\mathbf{x})$ je nyní součin jednosloupcové matice s jednořádkovou maticí. Tento součin je matice z $\mathbb{R}^{m\times n}$. Jinak vše z předchozího výpočtu funguje stejně. Tím je ten vzorec dokázán.

Poslední vzorec druhé tabulky je na straně 117 dokázán. Nechávám zde svůj starší důkaz. Pro $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dokážeme, že platí

$$\left((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)' = (\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{h}'(\mathbf{x}) + (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

Z analýzy jedné proměnné víme, že vzorec pro derivaci součinu se odvodí tak, že nejprve se celý součin derivuje, jakoby byl první činitel konstantní. To se sečte s derivací výrazu, ve kterém je jakoby druhý činitel konstantní. To provedeme i zde, tedy nejprve $\mathbf{h}$ derivujeme a na $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T$ se dívejme jako na konstantní matici $\mathbf{A}$ a použijme třetí vzorec z první tabulky. Dostaneme $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T(\mathbf{h}(\mathbf{x}))'$. Nyní si všimneme, že $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a ponechme $(\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T$ konstantní. Po zderivování (znovu s využitím třetího vzorce první tabulky) dostáváme druhý sčítanec výsledku v posledním vzorci tabulky.

▶ Cvičení 8.8 a), d) můžeme počítat takto:

$$\text{a) } (\mathbf{x}^T\mathbf{x})' = \mathbf{x}^T\,\mathbf{I} + \mathbf{x}^T\,\mathbf{I} = 2\,\mathbf{x}^T. \quad \text{d) } \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|' = \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}(\mathbf{x})}}\left((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)' = \frac{(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\|\mathbf{g}(x)\|}$$

V obou případech je využito posledního vzorce z druhé tabulky na str. 117 skript a v případě a) také faktu, že $\mathbf{x}' = \mathbf{I}$. V případě d) je pak použit ještě vzorec na derivaci složené funkce: odmocniny jako funkce jedné proměnné a součinu $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\,\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Povšimněte si, že cvičení 8.8 c) vyžaduje odvození posledního vzorce druhé tabulky ze strany 117, což jsme v předchozím textu před symbolem ▶ (s vyvinutím jistého úsilí) udělali.

8.10 Je $h'(d,s) = [-2d+3s,\ 3d+4s]$, takže konkrétně v bodě $(-1,1)$ je $h'(-1,1) = [5,1]$. Gradient v tomto bodě je tedy $[5,1]^T$ (derivace a gradient je totéž, jen derivace je zapsaná v řádku, gradient ve sloupci). a) směr největšího růstu je $[5,1]^T/\sqrt{26}$. Normujeme, protože nás zajímá jen směr, ne velikost. Pro doplnění: vrstevnice je kolmá na směr největšího růstu, tedy má tečnu ve směru $[1,-5]/\sqrt{26}$.

Strmost terénu (jak moc stoupá) v daném směru je rovna směrové derivaci. Ta se spočítá jako $h'(d,s)\,\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je normovaný vektor směru. V našem případě $[5,1]\,[1,-1]^T/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2}$.

8.12 Hessián je matice druhých parciálních derivací. Je symetrická, takže si můžete ušetřit námahu a spočítat jen derivace na diagonále a nad diagonálou. Cvičení 8.12 a) si spočítejte sami, ve skriptech je řešení. Ukážeme 8.12 c):

$$(\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x})' = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T), \quad (\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x})'' = ((\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\,\mathbf{x})' = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T).$$

Použili jsme třetí vzoreček druhé tabulky a pak druhý vzoreček z první tabulky ze strany 117 skript. Dále jsme před druhým derivováním řádek převedli do sloupce, protože derivování se aplikuje na sloupcové vektory. Platí $f'' = \left((f')^T\right)'$.

Třetí vzoreček z druhé tabulky ze strany 117 skript odvodíme pomocí posledního vzorečku téže tabulky, kde volíme $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$:

$$\left(\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\,\mathbf{x})\right)' = \mathbf{x}^T\,\mathbf{A} + (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^T\,\mathbf{I} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{A} + \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T).$$

8.13 Toto byste měli zkusit sami a zkontrolovat si jen výsledek s výsledkem ve skriptech. Kdyby Vám to nevycházelo, tady jsou mezivýpočty:

$$T_{2,f(1,-2)}(x,y) = f(1,-2) \;+\; \frac{f'(1,-2)}{1!}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} \;+\; \begin{bmatrix} x-1 & y+2 \end{bmatrix}\frac{f''(1,-2)}{2!}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix}$$

$$f(1,-2) = 46$$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 6y^2-6x^2 & 12xy-9y^2 \end{bmatrix}, \qquad f'(1,-2) = \begin{bmatrix} 18 & -60 \end{bmatrix}$$

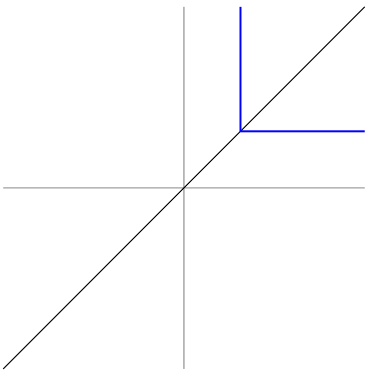
$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x-18y \end{bmatrix}, \qquad f''(1,-2) = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$$

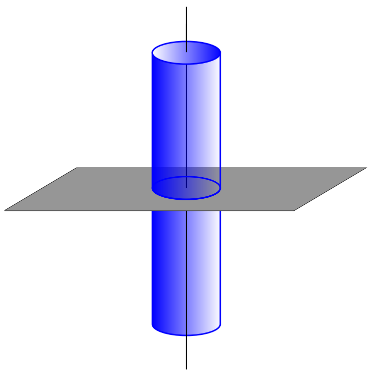
$$T_{2,f(1,-2)}(x,y) = 46 \;+\; \begin{bmatrix} 18 & -60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} \;+\; \begin{bmatrix} x-1 & y+2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} =$$

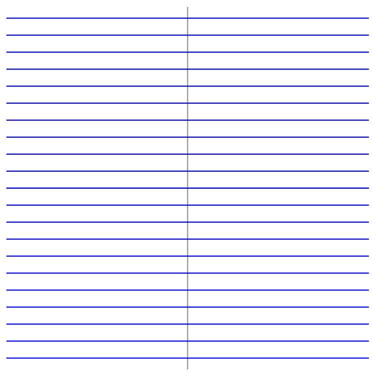
$$= -6x^2 - 24xy + 24y^2 - 18x + 60y + 46$$

Všechny členy polynomu ve výsledku se počítají z předposledního řádku výpočtu relativně pohodlně, jen ta závěrečná konstanta 46 dá zabrat. Můžete na ni jít taky tak, že dosadíte do výsledného polynomu bez konstanty hodnoty $(1,-2)$ a vyjde nula. Víme, že $f(1,-2) = 46$, takže ta konstanta musí být rovna 46.

9.2 Toto je poměrně snadné cvičení, takové množiny byste měli umět si představit bez větší námahy. Některé z nich jsem zde uvedl, ale zahrajeme si takovou hru. Neprozradím, které náčrtky souvisí s kterou podotázkou tohoto cvičení a dále jsem nenakreslil obrázky ke všem podotázkám.







9.3

a) Všechny body jsou uvnitř $\mathbb{R}$ vnitřní, je to celý prostor.

b) Body a, b jsou hraniční, ostatní prvky množiny jsou vnitřní.

c) Všechny prvky množiny jsou hraniční, žádný vnitřní (do množiny se nevejde žádné okolí žádného bodu množiny).

d) Všechny prvky množiny jsou vnitřní, hranice je sféra $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon$.

e) Je to „půlkružnice“ v $\mathbb{R}^2$, všechny její prvky jsou hraniční.

f) Je to část paraboly v $\mathbb{R}^2$, všechny prvky jsou hraniční (jako v e).

g) Množina je v prvním kvadrantu vymezena osami a hyperbolou. Ani osy ani hyperbola v ní neleží (to je její hranice). Všechny její prvky jsou vnitřní.

h) Je to množina v $\mathbb{R}^n$, pro kterou $x_i \le 1$ pro všechna $i \in \{1,\dots,n\}$. Body, pro které je aspoň jedna rovnost nabývána, jsou hraniční, ostatní jsou vnitřní. V $\mathbb{R}^2$ si množinu asi dovedete představit, je to průnik dvou polorovin, jejich hranice se protínají v bodě $(1,1)$. V $\mathbb{R}^3$ je to průnik tří poloprostorů, jejich hranice se protínají se v bodě $(1,1,1)$.

i) Pro nenulové $\mathbf{a}$ jsou všechny body hraniční.

j) Hranice (dva rovnoběžné afinní prostory) odpovídají místu, kde nastává jedna nebo druhá rovnost. Mezi těmito afinními prostory jsou vnitřní body množiny.

k) Pro nenulovou matici $\mathbf{A}$ jsou všechny body hraniční. Množina ovšem může být i prázdná. Pro nulovou matici je množina buď prázdná (při nenulovém $\mathbf{b}$) nebo je to celý prostor (při nulovém $\mathbf{b}$). Jen poslední případ odpovídá množině rovné celému prostoru, tj. všechny její body jsou vnitřní.