Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 05

Petr Olšák

6.1

	polynom	počet proměnných	stupeň	homogenní
a)	$+$	2	3	$-$
b)	$+$	n	1	$+$
c)	$-$	n		
d)	$+$	n	2	$-$
e)	$+$	$2n$	2	$+$
f)	$+$	n^2	1	$+$
g)	$+$	n^2	n	$+$

Toto je jednoduché cvičení na terminologii polynomů více proměnných. Sami si rozmyslete odpovědi na zadané otázky a pak to srovnejte se zde uvedenou tabulkou.

Případ c) není polynom, protože je to odmocnina z polynomu. Případ g) vás přinutí vzpomenout si na definici determinanu vzorcem, ve kterém je jistá suma součinů prvků x_{ij}, přičemž těch činitelů je v každém součinu stejný počet: n.

6.2 Toto je opakování na počítání vlastních čísel a vlastních vektorů matic. Charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ je pro první matici roven $\lambda^2 + 2\lambda - 1$ a jeho kořeny (tedy vlastní čísla matice) jsou $-1 \pm \sqrt{2}$. Dosadíme-li do vzorce $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ první kořen, dostáváme homogenní soustavu s maticí $[2 - \sqrt{2} \;\; 2 \mid 0]$ a vlastní vektor příslušející prvnímu vlastnímu číslu tedy je například $(2, \sqrt{2} - 2)$. Vlastní vektor příslušející druhému vlastnímu číslu je $(-2, 2 + \sqrt{2})$.

Výsledky pro druhou matici: $\lambda_1 = 2$. $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$.

Matlab má funkci `eig()`, která vrátí vlastní čísla. Celý spektrální rozklad matice `A` získáme pomocí `[V D] = eig(A)`.

6.4 Nulová matice má n vlastních čísel, všechny jsou nuly, vlastní vektory jsou jakékoli nenulové. Jednotková matice má vlastní čísla jedničky, vlastní vektory jsou libovolné nenulové. Obojí plyne přímo z definičního vzorce $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Diagonální i trojúhelníková matice mají vlastní čísla uvedené na diagonále této matice jak plyne z charakteristického polynmu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Má-li diagonální matice všechny diagonální prvky různé, pak i-tému vlastnímu číslu přísluší vlastní vektor $\mathbf{e}_i$ (všude nuly, jen v i-té složce je jednička). U trojúhelníkové matice není pro vlastní vektor přímý výsledek, je nutno jej spočítat dosazením do vzorce $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

6.5 Víme, že $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ označíme $\tilde{\lambda}$ a $\tilde{\mathbf{v}}$. Pro ně platí z definice $(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{v}}$. Po úpravě je $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\lambda} - \alpha)\tilde{\mathbf{v}}$, takže $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ a $\tilde{\lambda} - \alpha = \lambda$. Z poslední rovnosti máme $\tilde{\lambda} = \lambda + \alpha$. Vlastní číslo se zvěší o α a vlastní vektor k němu je stejný.

6.8 Připomeňme, že definitinost matic je definována jen pro symetrické matice. To všechny matice zadané v tomto cvičení splňují.

Druhá matice má vlastní čísla 1 a 3, obě jsou kladná, tj. je pozitivně definitní. Také všechny vůdčí hlavní minory, tj. $D_1 = 2$ a $D_2 = \det\mathbf{A} = 3$ jsou kladné.

Důležitá poznámka. Pro pozitivní definitnost stačí ověřit kladnost jen *vůdčích* hlavních minorů (*leading* principal minors) zatímco pro pozitivní semidefinitnost je třeba projít nezápornost *všech* hlavních minorů. Terminologie: *minor* je determinat libovolné čtvercové submatice, *hlavní minor* je determinant submatice, ve které je vybrána stejná podmnožina řádků i sloupců, *vůdčí hlavní minor* je determinat submatice umístěné v levém horním rohu původní matice.

Příklad: matice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ má oba vůdčí hlavní minory nulové, tedy nezáporné, ale to nestačí k tomu, abychom mohli prohlásit, že je pozitivně semidefinitní. Hlavní minor z matice $[a_{22}]$, který není vůdčí, je totiž záporný.

Další důležitá poznámka: Negativní (semi)definitnost matice $\mathbf{A}$ se nejspolehlivěji ověří jako pozitivní (semi)definitnost matice $-\mathbf{A}$. Kdybyste nechtěli přecházet k matici $-\mathbf{A}$, pak vězte, že hlavní minory lichých řádů musejí být záporné (nekladné) a hlavní minory sudých řádů musejí být kadné (nezáporné). Rozmyslete si $\det(-\mathbf{A})$ pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pro liché nebo sudé n.

Poslední matice v tomto cvičení má vůdčí hlavní minory $D_1 = -2$ a $D_2 = -6$. Dále není třeba počítat. Protože hlavní minor sudého řádu je záporný, nemůže být tato matice ani pozitivně ani negativně semidefinitiní, je tedy indefinitní.

6.9 Kdybychom počítali minory či vlastní čísla přímo zadané matice, nedostali bychom žádný relevantní výsledek. Vlastní čísla by klidně mohla třeba vyjít komplexní. To sice v tomto příkladě nenastalo, vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou -1 a -2, ale to nám nic neříká o negativní semidefinitnosti a tím ani o zápornosti příslušné kvadratické formy. Je třeba tutéž kvadratickou formu reprezentovat symetrickou maticí $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -4 \end{bmatrix}$ a ta je indefinitiní, protože má záporný minor sudého řádu. To můžeme zjsitit i z vlastních čísel této symetrické matice, kteá jsou přibližně $-4{,}05$ a $1{,}05$. Žádně z trvzení a), b), c) není tedy správně.

6.10 a) $2xy$ rozdělíme na dvě stejné čísti a máme symetrickou matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. b) Spektrální rozklad je $\mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ve sloupcích matice $\mathbf{V}$ jsou příslušné vlastní vektory. Je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T\mathbf{x}$, takže po přechodu na nové souřadnice $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ dostáváme $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{w} = 4u^2 + 2v^2$. Je tedy $\mathbf{U} = \mathbf{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. c) Je to elipsa se středem v počátku a procházející body $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{2}, 0)$. d) Přechod od souřadnic (x, y) k souřadnicím (u, v) je realozován otočením o 45°. Hledaná množina je otočená elipsa o úhel 45°.

6.14 a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 5$. Údaj $\mathbf{x}_0$ pro doplnění na čtverec získáme řešením soustavy $-2\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tedy $-2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$. Ta má řešení $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, -1)$. Takže

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & y + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y + 1 \end{bmatrix} + \frac{35}{4}.$$

Protože $\mathbf{A}$ je indefinitní (má záporný hlavní minor sudého řádu), má daná kvadatická funkce v bodě $(\frac{1}{2}, -1)$ sedlo, tedy nemá tam extrém.

Možná znáte doplňování na čtverec kvadratické funkce v jedné proměnné: $ax^2 + bx + c = a\,(x - (-b/2a))^2 + d$. Všimněte si analogie: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ v jedné proměné a $\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ve více proměných.

6.19 a) Positivně definitní matice $\mathbf{A}$ má spektrální rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, kde diagonální matice $\mathbf{\Lambda}$ má na diagnáe kladné prvky, ke kterým můžeme vytvořit převrácené hdnoty a dostaneme tak matici $\mathbf{\Lambda}^{-1}$. Pak je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T$, protože

$$(\mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{V}^T)\,(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T) = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,(\mathbf{V}^T\mathbf{V})\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\,(\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{\Lambda}^{-1})\,\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\,\mathbf{V}^T = \mathbf{I}.$$

b) Ukážeme nejprve regularitu matice $\mathbf{A}$, tedy že soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má jediné nulové řešení. Vynásobením zleva $\mathbf{x}^T$ máme rovnost $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = 0$. Protože ale je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (z předpokladu, že $\mathbf{A}$ je positivně definitní), musí být $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ukážeme nyní, že $\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} > 0$. Volme $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, tedy $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dosadíme: $(\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$.

6.26 Řešení ve skriptech k tomuto cvičení je dostatečně podrobné.