Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 03

Petr Olšák

4.1 a) $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 14$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$, **b)** $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(2,2,2)\| = \sqrt{12}$,
c) $\cos\alpha = \mathbf{x}^T\mathbf{y}/(\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|) = 2/\sqrt{2\cdot 14} = 1/\sqrt{7}$, $\arccos 1/\sqrt{7} \doteq 1{,}1832$.

4.2 Vektory leží ve společné přímce (tj. jsou lineárně závislé) a jsou shodně orientované.

4.3 Vyřešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{A}$ je matice obsahující v řádcích dané vektory. Báze řešení je např. $(1,1,-1)$.

4.4 Označme $A = X$, $B = Y$, $C = Z$. (Takto to bylo značeno v původní verzi skript.) B je řešení soustavy $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, C je řešení $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jsou to tedy lineární podprostory, $\dim B = 3$, $\dim C = 2$, je $C \subseteq B$. Všechny vektory kolmé na řešení libovolné soustavy $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ leží v lineárním obalu řádků matice $\mathbf{P}$. Protože podprostor $A = \operatorname{span}\{(1,0,1,0)\}$ leží v lineárním obalu řádků uvedených matic $\mathbf{B}, \mathbf{C}$, je kolmý na řešení odpovídajících soustav, tedy na B i C. Není pravda, že $B \perp C$, protože mají netriviální průnik. Je pravda, že $A = B^\perp$, $B = A^\perp$, protože $A \perp B$ a součet dimenzí prostorů A a B je 4, tedy dimenze celého prostoru, v němž máme dané vektory. Konečně není $A = C^\perp$ (třebaže $A \perp C$), protože součet dimenzí $1+2$ není roven dimenzi celého prostoru.

4.5 a) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 0$. Geometricky: úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé.
b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}|^2 + 0 + \|\mathbf{y}\|^2$. Pythagorova věta.
c) Je to stejné jako (b), přechod od $\mathbf{y}$ k $-\mathbf{y}$ nemění levou stranu dokazované rovnosti.
d) Analogicky jako (b), jen po roznásobení závorek je těch součinů v zápise poněkud více, ale všechny součiny s navzájem různými vektory jsou nulové.

4.6 `$ octave --no-gui` spustí svobodnou alternativu k Matlabu.

```
octave:1> A = [1 1 1 -1; 2 -1 -1 1; -1 2 2 1]'
A =
   1   2  -1
   1  -1   2
   1  -1   2
  -1   1   1

octave:2> [Q R] = qr(A,0)
Q =
  -5.0000e-01   8.6603e-01  -8.3267e-17
  -5.0000e-01  -2.8868e-01  -4.0825e-01
  -5.0000e-01  -2.8868e-01  -4.0825e-01
   5.0000e-01   2.8868e-01  -8.1650e-01

R =
  -2.00000   0.50000  -1.00000
   0.00000   2.59808  -1.73205
   0.00000   0.00000  -2.44949
```

Báze je ve sloupcích matice $\mathbf{Q}$. První bázový vektor je jen normalizovaný první sloupec matice $\mathbf{A}$, tj. zde násobený polovinou (ve skutečnosti mínus polovinou, v tom má algoritmus svobodnou volbu a jeho chování neovlivníme). Další sloupec je lineární kombinací prvních dvou sloupců $\mathbf{A}$, navíc kolmý na první sloupec $\mathbf{Q}$ a normalizovaný. Atd. Koeficienty lineárních kombinací sloupců matice $\mathbf{Q}$, které se rovnají sloupcům matice $\mathbf{A}$, vidíme v matici $\mathbf{R}$. Nepovinný parametr `0` ve volání funkce `qr()` vede na redukovaný QR rozklad. Bez něj bychom měli plný QR rozklad, tj. $\mathbf{Q}$ by byla čtvercová: další sloupce jsou ortonormální bází z ortogonálního doplňku $\operatorname{rng}\mathbf{A}$, tedy je tam řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matice $\mathbf{R}$ je pak obdélníková doplněná nulami.

Pozorování: QR rozklad je numerické vyjádření Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.

4.7 Jsou-li $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ ortogonální, tj. čtvercové s vlastností $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$, pak

$$(\mathbf{U}\mathbf{V})^T(\mathbf{U}\mathbf{V}) = \mathbf{V}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{V} = \mathbf{V}^T\mathbf{I}\,\mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Doplňující otázka k ortogonálním maticím: Je-li $\mathbf{U}$ ortogonální, pak $\mathbf{U}^T$ je taky ortogonální. Jinými slovy, ortogonální matice má nejen ve sloupcích, ale i v řádcích ortonormální bázi. Důvod: $\mathbf{U}$ má plnou hodnost, tedy z LA víme, že má inverzní matici, tj. matici, která násobena zleva i zprava danou maticí dává $\mathbf{I}$ (to se dokazuje pomocí determinantů). Sdělení $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ násobme zprava inverzní maticí $\mathbf{U}^{-1}$ a dostáváme, že $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Tato matice umí násobit danou matici $\mathbf{U}$ zprava i zleva se stejným výsledkem $\mathbf{I}$.

4.10 Není to izometrie, protože velikost vzoru $(1, -1, 2)$ není rovna velikosti obrazu $(1, 2, -1, 1)$. Kdybychom upravili zadání, že totiž $\mathbf{f}(1, -1, 2) = (1, 2, -1, 0)$, pořád bychom neměli izometrii, protože není skalární součin vzorů roven skalárímu součinu obrazů.

Doplňující otázka: mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kde $m > n$. Může být izometrií? Odpověď: Ne, protože f musí mít při $m > n$ netriviální kernel a nenulové vektory z kernelu mají obraz nulové velikosti.

4.12 a) Ověříme, že skalární součiny vektorů každý s každým dávají nulu.

b) Vyřešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích zadané tři vektory. Báze řešení je třeba $\mathbf{y} = (-1, 1, 0, 1)$.

c) Najdeme ortogonální projekce na posporostory $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ a $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$ (bylo v původní verzi skript). Normalizované vektory, tj. $\mathbf{x}_1/\sqrt{6}$, $\mathbf{x}_2/\sqrt{3}$, $\mathbf{x}_3/\sqrt{3}$ zapíšeme do sloupců matice $\mathbf{U}$. Matice má ortonormální sloupce. Dále do jednosloupcové matice $\mathbf{V}$ zapíšeme normalizovaný $\mathbf{y}/\sqrt{3}$. Projektor na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ je $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ a na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^T = \mathrm{span}\{\mathbf{y}\}$ je $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$. Ten druhý projektor se pohodlněji počítá (méně výpočtů při maticovém násobení) a vychází $\mathbf{P}_Y = \frac{1}{3}\,\mathbf{y}\mathbf{y}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Projektor $\mathbf{P}_X$ můžeme pak spočítat z právě vypočteného: $\mathbf{P}_X = \mathbf{I} - \mathbf{P}_Y$. Vyhneme se tak maticovému násobení $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

4.13 Můžeme volit jakékoli dva na sebe kolmé vektory ve $\mathrm{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Například první vektor ponecháme a druhý upravíme na $\mathbf{y}'$ tak, aby zůstal ve $\mathrm{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, ale byl na $\mathbf{x}$ kolmý. Zvolíme $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p}$ je kolmá projekce $\mathbf{y}$ na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}\}$, což je $\mathbf{p} = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{5}{2}(0, 1, 1)$. Takže $\mathbf{y}' = (1, 2, 3) - \frac{5}{2}(0, 1, 1) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$. Vektor $\mathbf{y}$ můžeme vynásobit dvěma jen pro formu, abychom měli celočíselný výsledek. Dva kolmé vektory respektující původní span jsou $(0, 1, 1), (2, -1, 1)$.

Poznámka: vzoreček pro výpočet projekce $\mathbf{p}$ můžeme odvodit dvěma způsoby. (1) číslo $c = \mathbf{y}^T\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ je první souřadnice vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem ortonormální bázi, kde prvním bázovým vektorem je $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. To je vlastnost skalárního součinu. Projekce je pak $\mathbf{p} = c\,\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ (2) Projekce je $\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{y}$, když $\mathbf{U}$ je jednosloupcová matice obsahující $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Tedy $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{y})/\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$.

Jiný způsob řešení: hledá se vektor $\mathbf{y}' = (\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})$ takový, že $\mathbf{y}' \perp \mathbf{x}$, tedy $(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})^T\mathbf{x} = 0$. To vede na $\alpha = \frac{-2}{5}$ a $\mathbf{y} = (\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}) \sim (-2, 1, -1)$.

4.20 Máme $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ s definičním oborem všech takových matic z $\mathbb{R}^{n\times n}$, pro které má matice $\mathbf{I} + \mathbf{X}$ inverzi.

a) $(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = \mathbf{I} - \mathbf{X}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} - \mathbf{X})$.

b) Vynásobíme výsledek z a) výrazem $(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ zprava i zleva.

c) Ověříme $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T\mathbf{F}(\mathbf{X}) \overset{?}{=} \mathbf{I}$, tedy $((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T-\mathbf{X}+\mathbf{X}^T\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}+\mathbf{X}-\mathbf{X}-\mathbf{X}^2)(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}) \overset{?}{=} \mathbf{I}$. Protože $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$, je možné vynásobit poslední rovnost výrazem $(\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$ zleva a ptát se tedy na $(\mathbf{I} - \mathbf{X}) \overset{?}{=} (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$ a to je pravda, protože $\mathbf{X}$ je antisymetrická. Korektní vedení důkazu nyní musí proběhnout obráceně: vyjdeme z faktu $(\mathbf{I} - \mathbf{X}) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$ a postupnými úpravami v protisměru slova „tedy“ dostaneme dokazované tvrzení $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$.

d) Ověříme $((\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T) \overset{?}{=} -(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$, tedy ověříme po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X})$ zprava tvrzení $((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T)(\mathbf{I}+\mathbf{X}) = (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T+\mathbf{X}-\mathbf{X}^T\mathbf{X}) =$

$(\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)^{-1}(-\mathbf{X}^T+\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} -(\mathbf{I}-\mathbf{X}) = \mathbf{X}-\mathbf{I}$, tedy po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)$ zleva ověřujeme $-\mathbf{X}^T+\mathbf{X} \stackrel{?}{=} (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)(\mathbf{X}-\mathbf{I}) = \mathbf{X}-\mathbf{I}+\mathbf{X}^T\mathbf{X}-\mathbf{X}^T = \mathbf{X}-\mathbf{I}+\mathbf{I}-\mathbf{X}^T = -\mathbf{X}^T+\mathbf{X}$. To zřejmě platí. Korektní vedení důkazu začíná poslední zřejmou rovností a jde v protisměru slov „tedy" až k závěru, že $(\mathbf{F}(\mathbf{X}))^T = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$.

e) Ověříme $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$, tedy $(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$. Po vynásobení $(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})$ zprava tedy ověřujeme $\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}) = \mathbf{X}+\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}$ a po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X})$ zprava tedy ověříme $(\mathbf{I}+\mathbf{X})-(\mathbf{I}-\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I}+\mathbf{X})+\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{X})$. Na obou stranách rovnosti máme $2\,\mathbf{X}$, takže to platí. Důkaz dále vedeme obráceně, tj. vyjdeme z faktu $2\mathbf{X} = 2\mathbf{X}$ a dojdeme k tvrzení, že $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$.

4.21 (Bylo v původní verzi skript, nyní je zadání přesunuto do 5.16 e,f,g,h.)

a) Je to vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od jeho kolmé projekce na $\operatorname{rng}\mathbf{U}$, tedy od bodu $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{x}$. Vzdálenost je $\|\mathbf{x}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{x}\| = \|(\mathbf{I}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{x}\|$.

Problémy (b), (c) a (d) budeme řešit od konce. Nejprve (d) a z toho vše ostatní plyne.

d) Nechť $\mathbf{p}$ je partikulární (tj. nějaké) řešení soustavy $\mathbf{U}^{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, takže leží v zadaném afinním podprostoru A. Kolmý doplněk k tomuto podprostoru je $X = \operatorname{rng}\mathbf{U}$. Na X kolmo promítneme jednak $\mathbf{p}$ (je to $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{p}$) a jednak zadaný bod $\mathbf{v}$ (v zadání cvičení značený ne zcela šťastně jako $\mathbf{x}$). Dostaneme $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}$. Vzdálenost $\mathbf{v}$ od A je stejná jako vzdálenost těch dvou projekcí, takže počítáme

$$\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{p}\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v}-\mathbf{U}^T\mathbf{p})\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v}-\mathbf{b})\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{v}-\mathbf{b}\|.$$

Předposlední rovnost plyne z faktu, že $\mathbf{p}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a poslední rovnost plyne z toho, že zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$ je izometrie.

b) Vzorec z (d) přechází při $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ na $\|\mathbf{U}^T\mathbf{v}\|$.

c) Vzorec z (d) přechází při $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ na $\|\mathbf{b}\|$.