Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 2

Petr Olšák

2.1) To je jednoduché opakování, jak můžeme upravovat maticové výrazy:

$$\text{a)}\quad \mathbf{AX}+\mathbf{B}=\mathbf{A}^2\mathbf{X},\quad \mathbf{AX}-\mathbf{A}^2\mathbf{X}=-\mathbf{B},\quad (\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)\,\mathbf{X}=-\mathbf{B},\quad \mathbf{X}=-(\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)^{-1}\,\mathbf{B}$$

Za zmínku stojí snad jen to, že zde šlo vytknout $\mathbf{X}$ *doprava* z obou sčítanců a tedy v posledním kroku šlo násobit inverzní maticí *zleva*. Násobení matic není komutativní. Taky lze konstantou -1 roznásobit inverzní matici, protože $-1^{-1}=-1$ a psát $\mathbf{X}=(\mathbf{A}^2-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}$. Dále:

$$\text{b)}\quad \mathbf{X}-\mathbf{A}=\mathbf{XB},\quad \mathbf{XI}-\mathbf{XB}=\mathbf{A},\quad \mathbf{X}\,(\mathbf{I}-\mathbf{B})=\mathbf{A},\quad \mathbf{X}=\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$$

$$\text{c)}\quad 2\mathbf{X}-\mathbf{AX}+2\mathbf{A}=\mathbf{O},\quad 2\mathbf{IX}-\mathbf{AX}=-2\mathbf{A},\quad (2\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{X}=-2\mathbf{A},\quad \mathbf{X}=-2\,(2\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}$$

Jednotkovou čtvercovou matici značíme $\mathbf{I}$, dále v zadání c) je nulová matice značena $\mathbf{O}$. Konečně v posledním kroku úlohy c) je konstanta (-2) vytknutá zcela dopředu, jak bývá zvykem. Můžeme též krátit: $\mathbf{X}=-2\,(2\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}=-2\,(2(\mathbf{I}-\frac12\mathbf{A}))^{-1}\,\mathbf{A}=-2\cdot2^{-1}(\mathbf{I}-\frac12\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}=(\frac12\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{A}$.

2.3) Nejprve si uvědomíme vektor proměnných: $\mathbf{u}^T=[\mathbf{x}^T\ \mathbf{y}^T\ \alpha]\in\mathbb{R}^{m+n+1}$. Dále je třeba převést součiny s proměnnými na levou stranu rovností a konstanty na pravou:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \alpha \\ \mathbf{Ax}+\mathbf{B}^T\mathbf{y}-\alpha\mathbf{1} &=& \mathbf{0} \\ \mathbf{Ay} &=& -\mathbf{c} \end{array}$$

Nad soustavu jsem modře vyznačil řádek s proměnnými. Proměnné v tomto řádku musejí korespondovat s jednotlivými sloupci matice $\mathbf{P}$, takže

$$\mathbf{Pu}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}^T & -\mathbf{1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{c}\end{bmatrix}$$

Zde je $\mathbf{O}$ nulová matice, $\mathbf{0}$ nulový vektor, $\mathbf{1}$ vektor (sloupec) obsahující samé jedničky. Uvědomíme si také, že $\alpha\mathbf{1}=\mathbf{1}\,\alpha$, přitom vlevo této rovnosti je α-násobek jedičkového vektoru a vpravo je součin matic, první z nich má jeden sloupec s jedničkami a druhá je z $\mathbb{R}^{1\times1}$ a obsahuje prvek α. Rozměry jednotlivých bloků matice $\mathbf{P}$ obecně jsou: $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $\mathbf{B}^T\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $-\mathbf{1}\in\mathbb{R}^{k\times1}$, $\mathbf{O}\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^{k\times1}$. Ejhle, matice $\mathbf{A}$ je ve dvou blocích a tudíž musí být $m=n$.

2.4 a) provedeme stejně jako ve cvičení 2.3, výsledek je ve skriptech.
b) Za předpokladu existence zmíněných inverzí $\mathbf{D}$ musí být čtvercová a $\mathbf{A}$ také je čtvercová (třebaže obecně jiného rozměru). Je možné provést blokově eliminaci vektoru $\mathbf{y}$ z druhé maticové rovnice a dosadit do první, jako bychom pracovali s čísly a ne s maticemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dy}&=\mathbf{b}-\mathbf{Cx},\quad \mathbf{y}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{Cx})\\ \mathbf{Ax}&=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{Cx})=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{Cx}\\ (\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\,\mathbf{x}&=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x}&=(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Výpočetní výhoda: počítáme s menšími maticemi. Předpokládejme, že na výpočet inverzí matice máme algoritmus složitosti n^3. Výpočet inverze matice řádově dvakrát vetší má pak složitost zhruba $(2n)^3=8n^3$, zatímco při vyjádřeném $\mathbf{x}$ stačí provést dvě inverze složitosti n^3 a tři násobení se složitostí n^3 a další operace sčítání a násobení sloupcovým vektorem se složitostí n^2. Takže máme složitost $5n^3$.

2.12 a,b) Dokážeme nejdříve b) a z toho pak vyplyne a).

Při značení $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{UCV}^T$, $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\,(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}$ je třeba dokázat $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$. Tím dokážeme, že $\mathbf{X}$ je levá inverze, ale ona je pak automaticky i pravá, protože matice jsou čtvercové a mají plnou hodnost (viz vzorec 3.19). Takže inverze k nim existuje (plyne z věty o výpočtu inverze pomocí determinantu). A když je $\mathbf{Z}$ pravá inverze k $\mathbf{Y}$, pak $\mathbf{XYZ} = \mathbf{IZ} = \mathbf{XI}$, takže pravá a levá inverze je stejná a víme také z lineární algebry, že je jediná. Nyní se pustíme do ověření $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$: Kvůli stručnosti výpočtu značím $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{UCV}^T)\,(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}+\mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} =$$
$$= \mathbf{I}+\mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{U}(\mathbf{I}+\mathbf{CV}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{UC}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} =$$
$$= \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UCBB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Rozmyslíme si ještě rozměry matic. V rámci součinu píšu do indexu před maticí počet jejích řádků a za ní počet jejích sloupců:

$${}_n\mathbf{X}_n = {}_n\mathbf{A}_n + {}_n\mathbf{U}_m\mathbf{C}_m\mathbf{V}^T_n, \quad {}_n\mathbf{Y}_n = {}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n - {}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n\mathbf{U}_m\,({}_m\mathbf{C}^{-1}{}_m + {}_m\mathbf{V}^T{}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n\mathbf{U}_m)^{-1}{}_m\mathbf{V}^T{}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n.$$

Vidíme, že vše sedí při rozměrech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. a že ve výpočtu výše je v závorce ve druhém kroku matice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, ale všude jinde máme matici $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Měli bychom ji tedy značit jinak, ale když si řekneme, že to jsou jiné matice, tak to snad stačí.

Případ b) přechází na případ a) při $m = 1$ a při $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ obsahující jedničku. Místo jednosloupcových matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ píšeme $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a vzorec dokázaný v b) pak přechází na

$$(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\,(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$$

Jednoprvkovou matici $1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$ označíme α a uvědomíme si, že $\mathbf{u}\,\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{u}$, kde vlevo je součin jednosloupcové matice $\mathbf{u}$ s inverzí jednoprvkové matice α a vpravo je $\frac{1}{\alpha}$-násobek vektoru $\mathbf{u}$ a tento skalár můžeme vytknout před celé maticové násobení a zapsat ho nakonec jako podíl tohoto maticového násobení číslem α. Lidově řečeno, skalár „vybublá“ z maticového násobení ven.

2.16 Je podrobně vyřešeno ve skriptech.

3.1 Je vyřešeno ve skriptech. Přidáme jen geometrický pohled.
a) Při daném nenulovém vektoru $\mathbf{a}$ jde o množinu vektorů na $\mathbf{a}$ kolmých, což vyplní nadrovinu kolmou na $\mathbf{a}$ procházející počátkem.
b) Je to nadrovina kolmá na daný nenulový vektor $\mathbf{a}$ posunutá do partikulárního řešení nehomogenní soustavy s jedinou rovnicí $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$.

3.2 Je to opakování klasické úlohy z lineární algebry. Je vyřešeno ve skriptech.

3.7 Je částečně vyřešeno ve skriptech. Je tam ukázáno, že existuje matice $\mathbf{A}$ a nenulový vektor $\mathbf{b}$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$. Tak poznáme afinní zobrazení. Ale poslední dovětek v zadání říká, že to máme dokázat *z definice*, která ve skriptech zní: afinní zobrazení je takové, které zobrazí afinní kombinaci vzorů $\mathbf{x}_i$ na afinní kombinaci obrazů $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ se stejnými koeficienty. Jinak řečeno:

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \text{kdykoli } \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$$

Ukážeme tedy, že toto je ekvivalentí s faktem, že lze obrazy $\mathbf{f}$ psát ve tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$.

Jeden směr důkazu je snadný. Předpokládáme-li $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, pak je při $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$:

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{A}\,(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) + \mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{Ax}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{Ax}_n + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\,\mathbf{b} =$$
$$= \alpha_1(\mathbf{Ax}_1 + \mathbf{b}) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{Ax}_n + \mathbf{b}) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Nyní předpokládáme pro $\mathbf{f}$ platnost definice a najdeme matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$. Volme $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$. Ukážeme, že zobrazení $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{0})$ je lineární:

$$\mathbf{g}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) =$$
$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n)\,\mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) =$$
$$= \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)+\cdots+\alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_n)\,\mathbf{f}(\mathbf{0})-\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \alpha_1(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(\mathbf{0}))+\cdots+\alpha_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(\mathbf{0})) =$$
$$= \alpha_1\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$$

Protože je $\mathbf{g}$ lineární, má svou matici $\mathbf{A}$. Konečně $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$.

3.8 Je to další klasická úloha z lineární algebry. Řešení je ve skriptech.

3.13, 15 Je to dokázáno podrobně ve skriptech.