Komentář k úlohám probíraným na cvičeních dle plánu 1

Petr Olšák

1.1 a) V řešení této úlohy ve skriptech je popsán geometrický přístup (obrázek a úvaha). Zde si ukážeme metodu eliminace proměnné a převedení úlohy na hledání minima funkce jedné proměnné. Úloha má dvě proměnné a je zřejmé, že řešení nebude uvnitř množiny přípustných řešení, ale na její hranici $xy = 1$, tedy $y = 1/x$. Nahradíme-li v účelové funkci proměnnou y výrazem $1/x$, dostaneme účelovou funkci v jedné proměnné: $f = x^2 + \frac{1}{x^2}$, pro kterou hledáme minimum na intervalu $(0, \infty)$. Funkce je na tomto intervalu spojitá a má spojitou derivaci, takže její minimum může být jen ve stacionárních bodech $f' = 0$, tedy $2x - \frac{2}{x^3} = 0$, tedy $x^4 = 1$, tedy $x = 1$. Vyloučili jsme $x = -1$, protože tento bod neleží v $(0, \infty)$. Souřadnici y dopočítáme ze vztahu $y = 1/x$ a máme tedy argument minima v bodě $[1, 1]$. Hodnota minima je $f = 2$. Že to je minimum a ne maximum by se dalo vyšetřit z průběhu funkce f v jedné proměnné x: na daném intervalu má f jediný stacionární bod a má jednostranné limity v obou krajních bodech $+\infty$.

b,c,d) Má řešení ve skriptech.

e) Při obvyklém značení r pro poloměr podstavy válce a v pro jeho výšku vyjádříme jeho objem $V = \pi r^2 v = 1$ a jeho povrch $S = 2\pi rv + 2\pi r^2$. Optimalizační úloha tedy zní:

$$\min\{2\pi rv + 2\pi r^2;\ \pi r^2 v = 1, r > 0, v > 0\}$$

Z první podmínky popisující množinu přípustných řešení snadno eliminujeme proměnnou $v = \frac{1}{\pi r^2}$ a účelovou funkci máme pak jen v proměnné r, tedy $f = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$. Vyšetříme ji na intervalu $(0, \infty)$. Uvnitř má jediný stacionární bod $f' = 0$, tedy $-\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0$, tedy $r^3 = \frac{1}{2\pi}$, tedy $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Tento stacionární bod tedy musí být minimem, protože f je spojitá se spojitou derivací a v krajních bodech intervalu $(0, \infty)$ má limity ∞. Dále je $v = \frac{1}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ a argument minima máme v bodě $[r, v] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right]$. Tím jsou rozměry válce s minimálním povrchem určeny.

f) Úlohu formálně zjednodušíme a počítáme $\min\{2\pi rv + \pi r^2;\ \pi r^2 v = 1/2, r > 0, v > 0\}$. Postupujme stejně, jako v úloze e). Vychází stejné r a dále zde vychází $v = r$.

g) Intuitivně je to čtverec, ale udělejme to pořádně. Strany obdélníka označme a, b, jeho úhlopříčka musí mít délku 2, takže dle Pythagorovy věty je $a^2 + b^2 = 4$. Hledáme maximum součinu ab, takže optimalizační úloha zní: $\max\{ab;\ a^2 + b^2 = 4,\ 0 < a < 2,\ 0 < b < 2\}$. Z podmínky eliminujeme proměnnou a: $a^2 = 4 - b^2$, tedy $a = \sqrt{4 - b^2}$. Účelová funkce má po eliminaci jen jednu proměnnou $f = \sqrt{4 - b^2}\, b$. Vyšetříme ji na intervalu $(0, 2)$. Funkce je spojitá, má všude spojitou derivaci, v krajních bodech má limity 0, je všude kladná a má jediný stacionární bod, který tedy musí být maximem. Stacionární bod zjistíme z $f' = 0$, tedy $\frac{-2b}{\sqrt{4-b^2}} + \sqrt{4 - b} = 0$, tedy $-b^2 + 4 - b^2 = 0$, tedy $b^2 = 2$, tedy $b = \sqrt{2}$. Dopočítáme $a = \sqrt{4 - b^2} = \sqrt{2}$. Argument maxima je $[a, b] = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, takže to je opravdu čtverec. Intuice tentokrát nezklamala.

h,i) Řešení je ve skriptech.

j) Označme strany obdélníka a, b. Plocha je $ab = 1$ a cena plotu (účelová nebo také cenová funkce) je $1000\,(a + 2b) + 500\,a$. Protože se neptáme na cenu (hodnotu účelové funkce), ale na argument minima, můžeme funkci vydělit například tisícem a máme optimalizační úlohu ve tvaru $\min\{\frac{3}{2}a + 2b;\ ab = 1\}$. Eliminujeme $b = 1/a$ a účelová funkce má jen proměnnou a: $f = \frac{3}{2}a + 2/a$ a vyšetřujeme ji na intervalu $(0, \infty)$. Je spojitá, má spojitou derivaci a limity v krajních bodech intervalu má ∞, takže má-li jediný stacionární bod, bude to minimum. Stacionární bod najdeme pomocí $f' = 0$, tedy $\frac{3}{2} + \frac{-2}{a^2} = 0$, tedy $a^2 = \frac{4}{3}$, tedy $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Po dosazení máme $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a argument minima je $[a, b] = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Zamyslíme se, v jakých jednotkách máme rozměry uvedené ve výsledku. V popisu množiny přípustných řešení jsme psali $ab = 1$, tedy jeden *hektar*. Jedna strana hektarového čtverce má 100 metrů. Naše jednotka je tedy 100 metrů, konkrétně strana a obdélníka má rozměr $\frac{200}{\sqrt{3}}$ metrů a strana b je velká $50\sqrt{3}$ metrů.

k,l) Má řešení ve skriptech.

m) Nakreslete si kružnici se středem O a poloměrem 1. Na ní na protilehlých stranách na kružnici vyznačte dva body A (start) a C (cíl). Mezi nimi kdekoli na kružnici nakreslete bod B. Potkan poplave nejkratší spojnicí úsečkou AB a dále poběží po kružnici mezi BC. Úhel AOB označíme α. Cesta potkana je dána polohou bodu B, neboli úhlem α. Délka první části cesty AB je $2\sin(\alpha/2)$. Zjistíte to tak, že rozdělíte úhel α jeho osou na dva a máte dva pravoúhlé trojúhelníky, úhel $\alpha/2$ je proti polovině úsečky AB v pravoúhlém trojúhelníku o přeponě délky 1. Dále délka běžecké části dráhy potkana je rovna délce oblouku na kružnici o poloměru 1 mezi body B a C a je tedy rovna $\pi - \alpha$. Označíme-li t čas a d délku dráhy, pak víme, že $t = d/v$, takže čas od startu k cíli je $t = \frac{1}{v_1} 2\sin(\alpha/2) + \frac{1}{v_2}(\pi - \alpha)$. Je to funkce jediné proměnné α s parametry v_1 a v_2 a máme ji minimalizovat na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, neboli hledáme $\min\{t(\alpha);\ 0 \le \alpha \le \pi\}$. Funkce je spojitá se spojitou derivací. Najdeme její stacionární bod z $t' = 0$, tedy $\frac{1}{v_1}\cos(\alpha/2) + \frac{-1}{v_2} = 0$, tedy $\cos(\alpha/2) = \frac{v_1}{v_2}$, tedy $\alpha = 2\arccos\frac{v_1}{v_2}$.

Kdybychom potkanovi poradili, že má nakreslit úhel $2\arccos\frac{v_1}{v_2}$ a tím najít bod B a pak bude vědět, jak má plavat a jak běžet, moc by nám nepoděkoval, naopak, začal by na nás nebezpečně prskat. Našli jsme totiž maximum účelové funkce t, nikoli její minimum, jak je zřejmé z druhé derivace funkce t. Funkce je na definičním intervalu konkávní. Je to takový malý chytáček.

Minimum konkávní účelové funkce t je tedy v jednom z jejích krajních bodů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. V nule má funkce t hodnotu $\frac{\pi}{v_2}$ a v bodě π má hodnotu $\frac{2}{v_1}$. Globální minimum je v tam, kde je odpovídající hodnota menší. Potkanovi tedy poradíme takto: umí-li přeplavat jezero rychleji než jej oběhne, tak ať plave napříč a vůbec neběží. V opačném případě ať běží a vůbec neplave.

n) Je řešeno ve skriptech.

1.2 $z \in \operatorname{argmin}_X f(x) \Leftrightarrow f(z) \le f(x)\ \forall x \in X \Leftrightarrow g(f(z)) \le g(f(x))\ \forall x \in X \Leftrightarrow z \in \operatorname{argmin}_X g(f(x))$.

1.3 $\operatorname{argmin}_Y f(x) = Y \cap \operatorname{argmin}_X f(x)$ právě když hodnoty v argumenetech minima na Y nejsou větší než hodnoty v argumentech minima na celé X, ale mohou být stejné. To platí právě když $f(z) \ge \min_Y f(x)$ pro všechna $z \in X \setminus Y$.

1.4 To je zřejmě znovu zopakované cvičení 1.2.