OPT: cvičení 01

1.1. Vyřešte následující úlohy, přičemž slovní úlohy nejdříve formulujte ve tvaru (1.9). Stačí vám k tomu papír, tužka, zdravý rozum a analýza funkcí jedné proměnné. Všimněte si, že některé úlohy lze převést na hledání extrémů funkce jedné proměnné na intervalu, což umíte z analýzy funkcí jedné proměnné.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad ; \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$

$\min \{ f(x) \; ; \; x \in X \}$

min

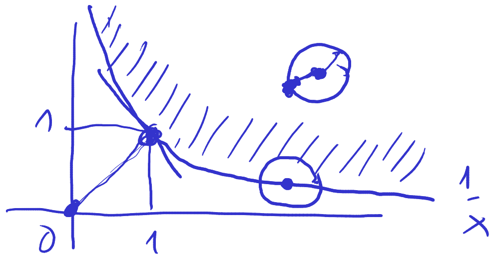
max

argmin

a) $\min\{\underbrace{x^2 + y^2}_{f};\ \underbrace{x \geq 0,\ xy \geq 1}_{X}\}$.

f: $\|(x,y)\|^2$

X: $\boxed{y \geq \frac{1}{x}}$



argmin : $(1,1)$

min : 2

$$f = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f' = 2x + \frac{-2}{x^3} = 0 \quad / \cdot x^3$$

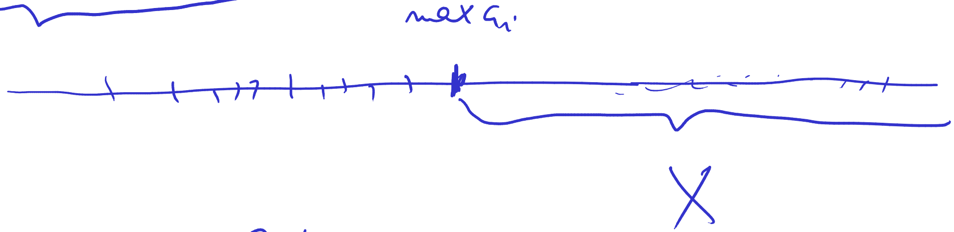
$$2x^4 = +2 \qquad x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x > 0$, $\underline{x = 1}$

$y = 1$

c) $\min\{x;\ x \in \mathbb{R}, x \geq a_i\ \forall i = 1, \dots, n\}$ pro daná $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x$



$\operatorname{argmin} = \max a_i$

$\min = \max a_i$

f) Najděte rozměry půllitru, na jehož výrobu je třeba co nejméně skla. Tloušťka stěn je zanedbatelná.

$$\underline{\pi r^2 \cdot v = \frac{1}{2}}$$

$$2\pi r \cdot v + \pi r^2 \ \ldots \ \min!$$

$$\min\{\ \ldots\ ;\ \underbrace{\ldots = \tfrac{1}{2}\ \big|\ r, v > 0}_{X}\}$$

$$v = \frac{1}{2\pi r^2}$$

$$f = \cancel{2\pi} r \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi} r^2} + \pi r^2 \ \ldots \ \min!$$

$$= \frac{1}{r} + \pi r^2$$

$$f' = \frac{-1}{r^2} + 2\pi r = 0 \quad / \cdot r^2$$

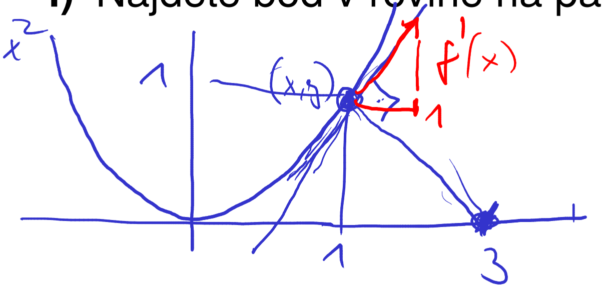
$$2\pi r^3 = 1$$

$$r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$v = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = r$$

i) Najděte bod v rovině na parabole s rovnicí $y = x^2$ nejblíže bodu $(3, 0)$.



$$\min \left\{ \|(x,y) - (3,0)\|^2 ; \; y = x^2 \right\}$$

$$\operatorname{argmin} = (1,1)$$

$$\big((x,y) - (3,0)\big) \perp (1, 2x)$$

$$(x-3, \underset{x^2}{y}) \cdot (1, 2x) = x - 3 + x^2 \cdot 2x$$

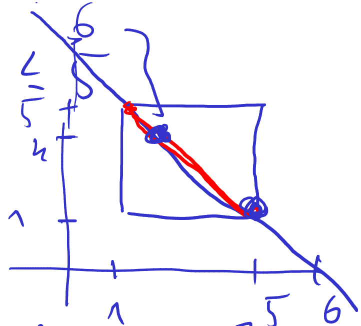
$$= \underline{2x^3 + x - 3} = 0$$

$$x = 1, \; y = 1$$

k) x, y jsou čísla v intervalu $\langle 1, 5\rangle$ taková, že jejich součet je 6. Najděte tato čísla tak, aby xy^2 bylo (a) co nejmenší a (b) co největší.

min, max $\{x \cdot y^2 ; \; x+y=6 ; \; 1 \le x \le 5, \; 1 \le y \le 5\}$

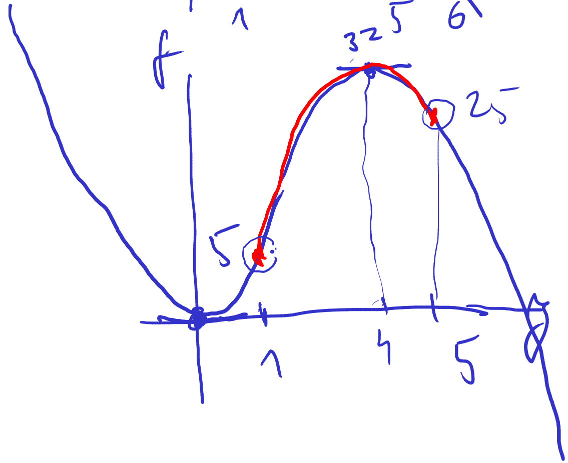
$x = 6 - y \qquad y \in \langle 1, 5\rangle$



$f = (6-y)\cdot y^2 = 6y^2 - y^3$ min:

$f' = 12 \cdot y - 3y^2 = 0 \qquad y = 0, \; y = 4$

$4y - y^2 = y \cdot (4 - y)$



arg max: $y = 4, \; x = 2$; max: 32

arg min: $y = 1, \; x = 5$; min: 5

I) Hledá se n-tice čísel $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ tak, že jejich součin je kladný a jejich součet minimální. Jako výsledek napište (co nejjednodušší) vzorec, který udává hodnotu tohoto minimálního součtu pro obecné n.

$$\min \{ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid x_1 \cdot x_2 \cdots x_n > 0 \,;\, x_i \in \{1, -1\} \}$$

argmin :

n sudé : $x_i = -1$; $\min = \underline{\underline{-n}}$

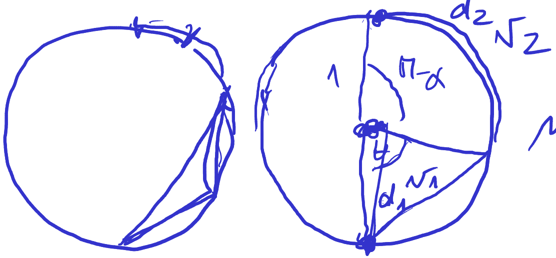
n liché : $x_i = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$; $x_n = 1$;

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}, 1) \\ (-1, -1 \cdots -1\ 1\ -1) \\ (-1 \quad\quad 1 \quad\quad) \\ (\quad\quad 1 \quad\quad -1) \\ (1 \quad\quad\quad\quad) \end{array} \right.$$

$\min = -n + 1 + 1$
$= \underline{-n + 2}$

$\min = -n + 1 - (-1)^n$

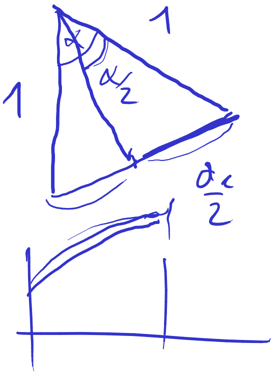
m) Potkaní biatlon. Potkan stojí na břehu kruhového jezírka o poloměru 1 a potřebuje se dostat na protilehlý bod břehu. Potkan plave rychlostí v_1 a běží rychlostí v_2. Chce se do cíle dostat co nejrychleji, přičemž může běžet, plavat, nebo zvolit kombinaci obojího. Jakou dráhu zvolí? Strategie potkana může být různá pro různé hodnoty v_1 a v_2, vyřešte pro všechny kombinace těchto hodnot.



$v = \frac{d}{t}$, $t = \frac{d}{v}$, $\alpha \in \langle 0, \pi)$

min! $t = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{1}{v_1} 2\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{v_2}\cdot(\pi-\alpha)$

$t' = \frac{1}{v_1}\cancel{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{v_2}(-1) = 0$



$\frac{d_1}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$

$d_1 = 2\sin\frac{\alpha}{2}$

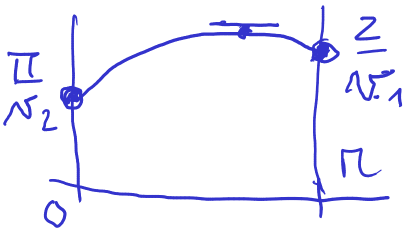
$d_2 = \pi - \alpha$

$t'' = \frac{1}{v_1}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} < 0$

$\frac{1}{v_1}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{v_2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v_1}{v_2}$

$\alpha = 2\arccos\frac{v_1}{v_2}$



n) Normální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ má hustotu pravděpodobnosti $p_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Chceme odhadnout parametry μ a σ ze vzorku nezávislých výběrů ze stejného rozdělení (i.i.d. = independent and identically distributed) $x_1, \dots, x_n$ na základě principu maximální věrohodnosti, tedy chceme maximalizovat věohodnost $\prod_{i=1}^{n} p_{\mu,\sigma}(x_i)$.

$$\max \left\{ \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} ;\ \sigma > 0 ;\ \mu \in R \right\}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = + \frac{1}{\cancel{2}\sigma^2} \sum \cancel{2}(x_i-\mu)\cdot(\cancel{-1}) = 0 \qquad \sum (x_i-\mu) = 0$$

$$\sum x_i - n\mu = 0$$

$$n\mu = \sum x_i$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sum \left(+ \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\sigma\cancel{\sqrt{2\pi}}} + \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sigma^3}(x_i-\mu)^2 \right) = 0 \quad / \cdot \sigma^3$$

$$\sum \left(\sigma^2 - (x_i - \bar{x}_i)^2 \right) = 0 \qquad n\sigma^2 - \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 = 0 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}}$$

1.2. Nechť X je libovolná množina a $f\colon X \to \mathbb{R}$. Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce. Dokažte, že $\operatorname{argmin}_{x\in X} f(x) = \operatorname{argmin}_{x\in X} g(f(x))$.

$$z \in \operatorname{argmin}_{x\in X} f(x) \iff f(z) \leq f(x) \quad \forall x \in X \;/\; g$$

$$\iff g(f(z)) \leq g(f(x)) \quad \forall x \in X$$

$$\iff z \in \operatorname{argmin}_{x\in X} g\circ f(x)$$

1.3. Nechť X je libovolná množina, $Y \subset X$, a $f: X \to \mathbb{R}$. Najděte co nejobecnější podmínku, za které platí $\operatorname{argmin}_{x \in Y} f(x) = Y \cap \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$.