Matematická analýza souhrnně a v souvislostech

Petr Olšák

Verze textu: 1. 9. 2023.

Tento text ve ve stádiu zrodu, zatím není dokončen, některé věci zde chybí.

Úvod

Tento text je určen pro čtenáře, kteří již prošli kurzem matematické analýzy funkcí jedné proměnné (úspěšně nebo třeba i neúspěšně) a mají zájem se podívat na to, co se naučili, k čemu to je, co je za tím, jak vypadá hlavní důvod, proč byly věci takto navrženy a formulovány. Tito čtenáři se tedy seznámili s počítáním limit, derivací, integrálů a nekonečných řad, ovšem často byla výuka vedena s důrazem na detail a s požadavkem umět cosi konkrétního spočítat tak, aby počtář nepřehlédl žádné jednotlivé mínus ve výpočtu a pamatoval si všechny postupy, předpoklady a vzorečky pro počítání. Ten důraz na detail je samozřejmě oprávněný, protože bez souhrnu detailů nevzniká celek. Ovšem my, když už jednotlivé detaily byly vysloveny, se můžeme zaměřit na celek a dívat se na něj z různých stran. Nemusíme teorii budovat od základních stavebních kamenů ke složitějším, ale můžeme přepínat mezi jednotlivými výsledky a dávat je do souvislostí. To běžné učebnice nedělají, protože potřebují teorii správně vybudovat. Nakonec jsou ale studenti často zkoušeni zejména z toho, zda dokážou na papír prezentovat na konkrétních umělých příkladech výpočetní postupy. To sice dává mnohým studentům „záchranné lano“, zejména těm, kteří si zatím neosvojili schopnost abstraktního uvažování a dokážou aspoň zopakovat nějaké naučené postupy. Ale vytrácí se pointa, proč byla matematická analýza vybudována.

I studenti, kteří se zaměřili zejména na počítání, jistě dospěli k důležitému poznání, že matematika není o počítání a už vůbec ne o číslech, ale o abstraktních strukturách existujících jen v našich myslích a majících různé vlastnosti, které má smysl zkoumat a exaktně je popsat. Čísla samotná (například přirozená čísla) jsou jen jedním příkladem takové abstraktní struktury, která navíc obsahuje nekonečně mnoho prvků. Slovo nekonečno trápilo matematiky celá staletí a hledali i pro tento pojem (existující jen v našich představách) nějaký konkrétní projev a možnost jeho uchopení přesnými postupy. A tento významný krok v lepšímu poznání nekonečna byl mimo jiné učiněn také v matematické analýze.

Máme výhodu, že můžeme dávat jednotlivé poznatky z matematické analýzy z různých koutů do společných souvislostí a ukazovat na tom, kde jsou hlavní myšlenky této teorie. Předpokládáme totiž, že čtenář již potkal ty jednotlivosti, na nichž je teorie vybudována. Takže, když o nich budeme mluvit, nebude už překvapený. Tento text tedy nenahrazuje učebnici matematické analýzy, jen ji přiměřeným způsobem doplňuje.

1 Matematická analýza pracuje s funkcemi

Matematická analýza nabízí možnosti *analýzy přírodních jevů pomocí matematiky* a při této analýze se pracuje zejména s funkcemi. Ty mohou vyjadřovat například závislost polohy pohybujícího se předmětu na čase, tvar kmitající struny, předpis pro výpočet ploch či objemů geometrických těles, počet členů populace v její n-té generaci a mnoho dalšího. Takže pojem funkce je základním stavebním kamenem matematické analýzy.

Funkce přiřazuje jednotlivým prvkům svého definičního oboru nějaké funkční hodnoty. Tento pohled na funkci je *dynamický*: představujeme si funkci jako nějakou černou skříňku, která je schopna na svém vstupu akceptovat postupně všechny prvky definičního oboru a pro každý z nich vydá na svém výstupu nějakou funkční hodnotu. Uvnitř může být ta skříňka „naprogramovaná“ jakkoli. Může například v sobě obsahovat tabulku se dvěma sloupci a s typicky nekonečně mnoha řádky, první sloupec obsahuje výčet všech prvků definičního oboru a vedle každého takového prvku je ve druhém sloupci funkční hodnota. Algoritmus takové černé skříňky poté, co dostane vstupní hodnotu, musí umět vyhledat v této nekonečné tabulce ten správný řádek a najde v něm výstupní hodnotu, kterou vrátí do výstupu. Souvislost mezi vstupní a výstupní hodnotou v této tabulce nemusí být vůbec žádná, tj. nemusí být možné popsat tvorbu výstupní hodnoty na základě vstupu nějakým konečným algoritmem či dokonce vzorcem. Ovšem v matematické analýze se skoro vždy setkáváme s funkcemi, které mají algoritmus výpočtu výstupní hodnoty na základě vstupního prvku daný nějakým vzorečkem.

Další pohled na funkci je *statický*, v matematické analýze se moc nevyužívá. Vychází z kartézského součinu množin. Nechť D je množina prvků definičního oboru funkce a M je množina všech případných hodnot funkce. Pak teorie množin (díky axiomům teorie množin, které se většinou v kurzech matematiky nezmiňují) nám umožní sestrojit kartézský součin těchto množin $D \times M$ a z něj můžeme vybírat různé podmnožiny. Vybereme-li takovou podmnožinu $f \subset D \times M$, že pro každý prvek $x \in D$ existuje právě jedna dvojice $(x, y) \in f$, nazýváme f funkcí z D do M. V tomto pohledu tedy f není černá skříňka, která nám vydává na základě vstupů výstupní hodnoty postupně v čase, ale díváme se na ni v jediném okamžiku jako na pevně zvolenou podmnožinu kartézského součinu s jistou vlastností. Vykreslíme-li všechny prvky takové podmnožiny f do roviny s osami x a y, dostáváme graf funkce f. Jistě Vám neušlo, že příklad černé skříňky ukrývající v sobě dvousloupcovou tabulku (viz výše) s tímto pohledem úzce souvisí, protože jednotlivé řádky té tabulky jsou právě všechny prvky podmnožiny f.

Poznamenejme ještě, že funkce označujeme písmeny f, g, atd. (ať se na ně díváme prvním nebo druhým pohledem), zatímco když napíšeme $f(x)$, máme na mysli *funkční hodnotu* z M, která je výstupem černé skříňky poté, co do ní vložíme prvek $x \in D$, neboli je to právě prvek y z dvojice $(x, y) \in f$. Je-li $f \subset D \times M$ funkce a $(x, y) \in f$, pak stejnou skutečnost zapisujeme také symboly $f\colon D \to M$, $y = f(x)$. Také se používá terminologie, že x je *vzor* a y *obraz* funkce f.

Není-li množina potenciálních funkčních hodnot M číselná, ale je to množina jiných matematických objektů, obvykle nemluvíme o *funkci*, ale o *zobrazení*. V matematické analýze se výhradně setkáváme s funkcemi, jejichž definiční obor je číselná množina a potenciální obor hodnot také. Taková funkce přiřazuje číslům čísla či z druhého pohledu je to podmnožina kartézského součinu *číselných množin* s vlastností funkce. Nejčastěji se setkáváme s funkcemi $f\colon D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}$, tedy s *reálnými funkcemi reálné proměnné*. Nebude-li řečeno jinak, vždy budeme mít v tomto textu na mysli takové funkce.

Jak jsem uvedl dříve, v matematické analýze je velmi obvyklé pracovat jen s takovými funkcemi, kde jejich algoritmus vytvářející funkční hodnoty lze popsat vzorcem, krátce budeme říkat *funkce daná vzorcem*. Tím se myslí přesně toto: existuje pro funkci f jediný vzorec v proměnné x, jenž může obsahovat jako operandy číselné konstanty a proměnnou x a dále tyto operandy mohou být podle tohoto vzorce zpracovány binárními operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění a unárními operacemi sin, cos, ln, exp, atd. v libovolném množství a pořadí (pořadí vyplývá z obvyklých priorit operací a z použití závorek). Vzorec je pak možné numericky vyhodnotit, pokud se rozhodneme pro konkrétní hodnotu $x \in D$ (tj. dosadíme za x konkrétní číslo). Výsledek tohoto vzorce je pak výstupní hodnota funkce f v daném bodě $x \in D$. Funkce dané vzorcem zapisujeme neformálně pomocí $f(x) =$ vzorec v proměnné x, například $f(x) = x^2 + 1$ nebo $f(x) = 2x - \sin(\ln(x))$. Numerické vyhodnocení prvního z těchto příkladů pro $x = -2$ vede k hodnotě 5, takže platí $f(-2) = 5$, zatímco u druhého příkladu takové numerické vyhodnocení nelze na úrovni aritmetiky reálných čísel provést. Tomu lze lidově říkat, že vzorec pro hodnotu $x = -2$ *selže*. Selhání nastává při pokusu dělení nulou a dále v případech, kdy argument unárních operací ln, $\sqrt{\ }$, arcsin, atd. je mimo maximální definiční obor těchto operací.

Přesná definice funkce f předpokládá, že je dán její definiční obor D_f a předpis, který každému prvku $x \in D_f$ přiřadí reálnou funkční hodnotu. Máme-li například $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = x^2$ a $g\colon \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$ danou stejným předpisem $g(x) = x^2$, pak máme na mysli různé funkce, protože se liší svým definičním oborem. Zde zadaná funkce g je prostá, zatímco f není prostá. Bývá ovšem obvyklé u funkcí zadaných vzorcem jejich definiční obor neuvádět. Stane-li se to (což nastává skoro vždy), je v zadání funkce automaticky míněn maximální možný definiční obor, pro nějž daný vzorec neselže. Například, zadá-li nám někdo funkci f vzorcem $f(x) = 2x - \sin(\ln(x))$ a neuvede definiční obor, je automaticky míněn definiční obor $(0, \infty)$, protože tento interval obsahuje právě všechny hodnoty x, ve kterých zadaný vzorec neselže (tedy lze jej vyčíslit v reálné aritmetice). Zadá-li nám někdo k této funkci definiční obor, například $D_f = (0, 1)$, pak je funkce úplně zadaná. Pokud ovšem někdo prohlásí za definiční obor funkce s uvedeným vzorcem třeba interval $\langle -1, 1\rangle$, musíme mu vysvětlit, že daný vzorec neumožní vyčíslit všechny hodnoty pro všechna x z jím zadaného definičního oboru, takže funkce není korektně zadaná.

Protože jsou funkce v matematické analýze skoro vždy zadané vzorcem, setkáváme se často se zkráceným vyjadřováním: „je dána funkce $f(x) =$ vzorec“ nebo dokonce jen „je dána funkce vzorec“. To sdělení ve skutečnosti přesně znamená: „je dána funkce f uvedeným vzorcem a její definiční obor je maximální takový, aby po žádný jeho prvek vzorec neselhal“.

Zopakujeme ještě důležitou terminologii pro funkce. Funkce je *prostá* (injektivní), pokud neexistují dva různé obrazy z definičního oboru, které by měly stejné vzory. Funkce $f\colon D \to M$ je *na* množinu M (surjektivní), pokud všechny obrazy f pokrývají celou množinu M. Z této druhé definice vidíme, že když píšeme $f\colon D \to M$ bez zdůraznění slova „na“, musí funkce sice umět zobrazit všechny prvky z D, ale množina M může obsahovat prvky, které nepatří do oboru všech hodnot f. Neexistují-li takové nezobrazené plonkové prvky v množině M, říkáme, že funkce je „na“. To je v matematice obvyklá terminologie pro funkce. Je-li funkce $f\colon D \to M$ *prostá a na*, říkáme ji také bijektivní funkce (krátce *bijekce*).

2 Číselné množiny

Funkce zobrazují čísla na čísla, stojí tedy za to si o číslech povědět více. Začneme základními vlastnostmi množiny přirozených čísel a pak ji kvůli potřebě uzavřenosti operace mínus rozšíříme na čísla celá, dále kvůli potřebě uzavřenosti na operaci děleno ji rozšíříme na čísla racionální a nakonec přidáme iracionální čísla a budeme mít čísla reálná.

Přirozená čísla. Ta nám umožňují zjistit počet objektů. Uvědomíme si, jak to funguje na příkladě z dávné minulosti lovců mamutů. Předpokládejme, že tito lidé ještě neměli univerzity, kde by se jejich děti učili diferenciální počet, tj. neměli ještě vyvinuté abstraktní myšlení a jejich řeč také ještě nebyla nic moc. Lovec si třeba vyšel na palouk a tam uviděl tři mamuty. On nevěděl, že jsou „tři“, ale zvedl jeden prst a přiřadil jej jednomu mamutovi, dále druhý prst přiřadil dalšímu a třetí prst poslednímu. Aniž by to věděl, provedl *bijektivní zobrazení* mezi množinou vztyčených prstů a množinou mamutů. Tj. žádného mamuta nepočítal dvakrát (injektivita) ani žádný mamut na palouku nezůstal nezapočítán (surjektivita). Pak s takto vztyčenými prsty přišel do jeskyně k ostatním kolegům, ukázal jim ty prsty, vyjádřil dalším posunkem, že jde o mamuty a ukázal, kde. Ostatní lovci na základě této informace věděli, kolik na palouku mohou očekávat mamutů. Nemuseli mít to číslo pojmenováno jako „tři“, ale zkušenost o třech vztyčených prstech jim dala jasnou představu. A nemuseli ty mamuty fyzicky vidět. Posléze přestala na takové počítání stačit množina prstů, ale vyvinula se řeč. A v rámci ní se děti učili říkanku: jedna, dvě, tři, čtyři, ... Při počítání objektů pak děti provedli bijektivní zobrazení mezi slovy z úvodní části této říkanky a počítanými objekty. U kterého slova se děti zastavily, to byl počet objektů. Na té říkance jsou podstatné tyto věci: Má první slovo „jedna“ a pro každé slovo v říkance existuje následující slovo, které zatím nebylo v říkance vysloveno. Množina těchto slov je tedy neomezená a jsme schopni pomocí bijektivního zobrazení ze slov ze začátku říkanky na libovolně velkou neprázdnou konečnou množinu zjistit počet jejích prvků a předat tuto informaci dalšímu člověku, který počítané předměty nemusí vidět, ale přesto má představu, kolik těch předmětů je. Je to tím, že všichni lidé na celém světě tuto říkanku znají a používají ji stejně. Samozřejmě, musejí existovat bijektivní zobrazení této říkanky mezi různými jazyky. Jednotlivá slova v říkance lze navíc prostřednictvím bijektivního zobrazení nahradit symboly $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ a všechny tyto symboly (čísla) tvoří množinu přirozených čísel.

Přirozená čísla umíme sčítat: Vezmeme si dvě disjunktní množiny předmětů, spočítáme pomocí bijekce počet prvků v jedné, pak ve druhé množině a pak v obou množinách dohromady. Ten poslední výsledek je součtem těch předchozích dvou čísel. Nově se naučíme takový součet provádět jen s čísly samotnými bez nutnosti k tomu počítat prvky nějakých konkrétních množin. To se naučí děti v první třídě a v případě součtů větších čísel vyjádřených větším množstvím cifer v desítkové soustavě se algoritmem na sčítání čísel pod sebou děti trápí ještě v dalších ročnících.

Pro přirozená čísla platí důležitá vlastnost. *Každé* přirozené číslo lze vybrat tak, že vybereme jedničku a pak nahrazujeme vybrané číslo jeho následníkem tak dlouho, až dospějeme k požadovanému číslu. To se podaří vždy v *konečně* mnoha krocích. Díky tomu funguje důkaz indukcí: dokazuje se platnost nějaké vlastnosti $V(n)$ pro *všechna* přirozená čísla n tak, že se ověří $V(1)$ a dále $V(k) \Longrightarrow V(k+1)$.

Celá čísla. Výsledek odčítání $a - b$ lze definovat jako takové číslo c, pro které platí, že $c + b = a$. Ne vždy se mezi přirozenými čísly povede takové číslo c najít, musíme tedy množinu čísel rozšířit o nulu a záporná čísla. Máme množinu celých čísel.

Racionální čísla. Opakovaným sčítáním lze zavést násobení. Výsledek dělení a/b lze pak definovat jako takové číslo c, pro které platí $a = bc$. Takové c se nepodaří na množině celých čísel vždy nalézt. Především pro $b = 0$ nelze výsledek dělení najít nikdy a takovou operaci zakážeme. Pro ostatní $c \neq 0$ můžeme výsledek vždy zapsat ve tvaru zlomku, tedy dvojice čitatel/jmenovatel tak, že čitatel je číslo celé a jmenovatel přirozené. A existují algoritmy, jak spolu sečíst, odečíst, vynásobit a vydělit libovolné dva zlomky a výsledek zapsat ve tvaru zlomku. Tím se rovněž děti zabývají na základní škole. A učiní také pozorování, že zlomek daný dvojicí čitatel/jmenovatel není zadán jednoznačně a je vhodné tedy zlomky krátit do základního tvaru. Množina všech zlomků v základním tvaru je pak množina racionálních čísel.

Pro každé dva zlomky lze také odpovědět na otázku, který je větší. Dále učiníme pozorování, že mezi každé dva různé zlomky a, b takové, že $a < b$ lze vložit zlomek c, pro nějž platí $a < c < b$, například volíme $c = (a+b)/2$. Úžasné na tom je, že toto lze provést pro dva libovolně blízké zlomky. Je-li třeba vzdálenost mezi a a b rovna jen $1/1\,000\,000$, přesto mezi ně vměstnáte zlomek c. A ta vzdálenost mezi a a b může být libovolně malá, vyjádřená převrácenou hodnotou libovolně velkého přirozeného čísla. Je ovšem také pravda, že mezi dvěma libovolně blízkými zlomky je plno čísel, se kterými potřebujeme pracovat například v geometrii, ale ony to nejsou zlomky. Typickým příkladem je délka úhlopříčky čtverce o straně 1, která je rovna dle Pythagorovy věty $\sqrt{2}$, což je číslo, o kterém se docela snadno dokáže, že není zlomek. Důkaz dělat nebudeme, lze jej najít na moha místech a možná jste se jej také učili.

Reálná čísla. Můžeme si na osu (vodorovnou přímku) zanést (aspoň myšlenkově, fakticky to nepůjde) všechny zlomky seřazené podle velikosti. Pak je tato množina zlomků na té přímce „hustá“ díky vlastnosti, že mezi každými dvěma zlomky je další. Ale taky ta množina nepokrývá všechny body na ose, protože mezi nimi třeba není délka úhlopříčky čtverce. To se možná těžko představuje, ale je to fakt.

Ta chybějící iracionální čísla lze zavést postupem podobným jako při zavedení limit: ke každému iracionálnímu číslu se lze libovolně přesně přiblížit vhodně zvolenou posloupností racionálních čísel. Například k iracionálnímu číslu π se lze libovolně přesně přiblížit posloupností racionálních čísel 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3.14159; ... Pokud někdo namítne, že nevidí v těchto číslech zlomky, napíšeme mu je ve tvaru 3/1, 31/10, 314/100, 3141/1000, atd. Přidáme-li všechna iracionální čísla k racionálním, dostáváme čísla reálná.

Operace sčítání, odčítání, násobení a dělení reálných čísel můžeme provést s úplnou přesností, jsou-li to čísla racionální, a se sice omezenou přesností, ale s libovolně malou chybou, jsou-li to čísla iracionální. Každé iracionální číslo totiž můžeme vyjádřit podobně jako číslo π v předchozím odstavci pomocí posloupnosti racionálních čísel s konečným desetinným rozvojem a můžeme se spokojit jen s n-tým prvkem této posloupnosti, stačí-li nám výsledek s přesností na n desetinných míst. To není úplně přesně řečeno, ale že je možné dosáhnout jakékoli přesnosti výsledku vhodně voleným počtem desetinných míst při výpočtu je zřejmé.

Máme tedy aspoň rámcově zavedena reálná čísla a můžeme na nich provádět operace sčítání, odčítání, násobení, dělení. Takže hodnoty funkcí zadaných vzorci obsahujícími jen tyto operace umíme nyní vyhodnocovat v libovolném reálném bodě (mimo bodů, kde dochází ke kolapsu vzorce kvůli dělení nulou) s libovolně stanovenou přesností. V následujících třech sekcích zavedeme další funkce, které se ve vzorcích v matematické analýze běžně vyskytují: mocniny, odmocniny, exp, ln, log, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg, arccotg.

Komplexní čísla. Neexistuje reálné číslo x, pro které je $x^2 + 1 = 0$. Jinak řečeno $\sqrt{-1}$ nedává reálný výsledek. To motivuje k rozšíření reálných čísel na další číselnou množinu komplexních čísel. Každé komplexní číslo je uspořádanou dvojicí reálných čísel (složkám té dvojice říkáme reálná a imaginární část) a čísla se dají sčítat a odčítat po složkách a násobit a dělit podle jistých vzorců. Komplexní číslo x můžeme graficky znázornit jako bod v rovině. Jeho vzdálenost od počátku je velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla, značíme ji $|x|$. Dále úhel mezi reálnou osou a polopřímkou vedenou z počátku ke zmíněnému bodu je argument komplexního čísla $\arg(x)$. Číslo $[0,1]$ se značí i, je to imaginární jednotka a pro ni platí $i^2 = -1$. Množina komplexních čísel je algebraicky uzavřená (každý polynom má v komplexním oboru kořen), takže další rozšiřování množin není potřeba. V tomto textu (až na malou výjimku) se zabýváme jen reálnými funkcemi jedné reálné proměnné, tj. komplexní čísla zde zmiňuji jen pro doplnění souhrnu číselných množin. Věnuje se jim pořádně komplexní analýza.

3 Mocnina a elementární funkce exp, ln

Přirozený exponent. Jakmile umíme na reálných číslech sčítat, odčítat, násobit, dělit, každého napadne možnost zavedení další operace: mocnění. Protože násobení je původně definováno jako opakované sčítání, je přirozené zavést mocnění jako opakované násobení. Tedy pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n = \underbrace{a\,a\cdots a}_{n \text{ krát}}.$$

Další naší snahou bude rozšířit operaci mocnění na možnost použít reálný exponent (nejen přirozený) za dodatečného předpokladu, že základ bude kladný. Povšimneme si, že pro přirozené exponenty m, n platí:

$$a^m a^n = \underbrace{a\,a\cdots a}_{m \text{ krát}}\underbrace{a\,a\cdots a}_{n \text{ krát}} = \underbrace{a\,a\cdots a}_{m+n \text{ krát}} = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a\,a\cdots a}_{m \text{ krát}}\cdots\underbrace{a\,a\cdots a}_{m \text{ krát}}}_{n \text{ krát}} = \underbrace{a\,a\cdots a}_{mn \text{ krát}} = a^{mn}.$$

Tyto *dvě základní vlastnosti mocniny*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn} \tag{1}$$

bychom chtěli udržet v platnosti i pro případné rozšíření mocniny na reálný exponent.

Celočíselný exponent. Pro nulový exponent je rozumné definovat $a^0 = 1$, protože

$$a^n = a^{n+0} = a^n a^0 = a^n \cdot 1$$

rozšíření pro záporné exponenty a nenulový základ a pak je $a^{-n} = 1/a^n$, protože:

$$a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1, \quad \text{takže } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Racionální exponent. Abychom mohli rozšířit mocnění na racionální exponent, musíme na chvíli mluvit o n-tých odmocninách, tedy inverzních funkcích k n-té mocnině základu x, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro liché n je funkce $f(x) = x^n$ prostá na $\mathbb{R}$, ale pro sudé n nikoli. Musíme pro tento případ zúžit definiční obor na $\langle 0, \infty)$, protože inverzi lze sestrojit jen k prosté funkci. Po zúžení definičního oboru v případech sudého n máme nyní všechny funkce f dané vzorcem $f(x) = x^n$ prosté a mají inverzní funkci g, kterou nazýváme n-tá odmocnina a píšeme $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Platí $\sqrt[n]{x} = x^{(1/n)}$ protože:

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}\cdot n} = x^1 = x, \quad \text{aplikací } n\text{-té odmocniny na obě strany rovnosti máme: } x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Mocninu základu $a > 0$ na libovolný racionální exponent p/q pak přirozeně definujeme:

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ověříme si, že i pro racionální exponenty zůstávají v platnosti dvě základní vlastnosti mocniny (1):

$$a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{u}{v}} = \sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[v]{a^u} = \sqrt[qv]{a^{pv}}\,\sqrt[qv]{a^{qu}} = \sqrt[qv]{a^{pv}\,a^{qu}} = \sqrt[qv]{a^{(pv+qu)}} = a^{\frac{pv+qu}{qv}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{u}{v}},$$
$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^u} = \sqrt[v]{\sqrt[q]{a^{pu}}} = \sqrt[qv]{a^{pu}} = a^{\frac{pq}{qu}} = a^{\frac{p}{q}\frac{u}{v}}.$$

Reálný exponent. Nyní rozšíříme funkci $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $h(x) = a^x$ (pro $a > 0$) na funkci $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má na racionálních číslech stejné hodnoty jako h a je spojitá. Že to jde a navíc jediným způsobem je podrobněji vysvětleno v dodatku ... Intuitivně lze tušit, že to půjde, protože množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$. V tomto dodatku je rovněž ukázáno (limitním přechodem), že i pro reálné exponenty platí základní vlastnosti mocniny (1).

Exponenciální funkce. Máme tedy spojité funkce $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané vzorcem $r(x) = a^x$ s různými základy $a > 0$. Z definice derivace víme, že:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Pokud zvolíme a takové, že $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$, budeme mít funkci, jejíž hodnoty derivace se rovnají funkčním hodnotám. Takové $a > 0$ existuje a nazýváme jej e. Vykreslíme-li si grafy funkcí $r(x) = a^x$ pro různé základy a, najdeme mezi těmi grafy jediný, který má v bodě $[0, 1]$ tečnu vedenou pod úhlem 45 stupňů, což odpovídá (z definice derivace v bodě 0) tomu, že $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$. Funkci $r(x) = e^x$ nazýváme exponenciální funkcí s přirozeným základem. Značíme ji exp. Ve vzorcích často píšeme místo $\exp(x)$ přímo e^x.

Funkce e^x je jediná nenulová funkce, jenž má na celém $\mathbb{R}$ derivaci shodnou se svou funkční hodnotou. Je rostoucí, spojitá, neomezeně diferencovatelná a její funkční hodnoty vyplní všechna kladná čísla. Hodnoty exponenciální funkce se dají spočítat s libovolnou stanovenou přesností z částečných součtů její Taylorovy řady v bodě 0:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{2}$$

Tato řada konverguje díky faktoriálům ve jmenovatelích rychle pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Konvergenci lze ověřit třeba podílovým kritériem. Z řady můžeme také zjistit při dosazení $x = 1$ hodnotu přirozeného základu $e = \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!) \doteq 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235$

Přirozený logaritmus. Protože e^x je rostoucí funkce na celém definičním oboru $\mathbb{R}$, je prostá a má tedy inverzní funkci, kterou značíme ln a nazýváme ji přirozený logaritmus. Protože obor hodnot funkce exp je interval $\langle 0, \infty)$, je tentýž interval definičním oborem ln. Platí pochopitelně $e^{\ln x} = x$ pro všechna kladná x.

Jak počítat reálnou mocninu. Konečně se dostáváme ke splnění cíle, který jsme si stanovili na začátku sekce, totiž definovat mocninu a^b pro kladné a a pro libovolné $b \in R$. Platí:

$$a^b = e^{b \ln a}. \tag{3}$$

protože $e^{b \ln a} = e^{(\ln a)\, b} = (e^{\ln a})^b = a^b$. K vyhodnocení obecné mocniny nám tedy stačí používat funkce exp a ln. A co je důležitější, kdykoli vidíme ve vzorci nějaké funkce obecnou mocninu s nekonstantním základem i exponentem, je pro vyšetření vlastností takto definované funkce rozumné použít vzorec (3) a dále se zabývat jen argumentem funkce e^x, tedy výrazem $b \ln a$. Například při počítání limity funkce $f(x)^{g(x)}$, která v limitním bodě vede na neurčitý výraz 1^∞ nebo 0^0, převedeme tento problém na počítání limity $g(x) \ln(f(x))$, což je pak neurčitý výraz $0 \cdot \infty$. Je-li výsledek takové limity roven L, je výsledek původní limity roven e^L, protože e^x je spojitá funkce.

4 Logaritmus podrobněji

V předchozí sekci byl zaveden přirozený logaritmus ln jako inverze k funkci e^x. Používám označení ln (logaritmus naturalis), protože je inverzí k exponenciální funkci přirozeného základu. V některých textech se tato funkce značí log, ale my si symbol log rezervujeme pro logaritmy o případně jiném základu.

Protože graf funkce e^x má v bodě $[0,1]$ tečnu svírající úhel 45 stupňů, má i graf funkce ln v bodě $[1,0]$ tečnu svírající úhel 45 stupňů. ln je spojitá funkce, platí $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Dále pro logaritmus platí vzorec známý z filmu „Marečku podejte mi pero“:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \tag{4}$$

Je to z toho důvodu, že $e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$ a proto, že funkce e^x je prostá, takže z rovnosti jejích obrazů plyne i rovnost jejích vzorů.

Ze směru tečny 45° ke grafu funkce ln v bodě $[1,0]$ vyplývá hodnota limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1,$$

ale tentokrát z ní derivaci logaritmu neodvodíme, použijeme místo toho větu o derivaci inverzní funkce. Nechť $y = e^x$:

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Třetí základní vlastnost mocniny. Vzorec (4) použijeme k odvození třetí základní vlastnosti mocniny:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Tato identita vypadá přirozeně pro přirozené exponenty:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ krát}} = \underbrace{a\,a\cdots a}_{n \text{ krát}}\underbrace{b\,b\cdots b}_{n \text{ krát}} = a^n b^n$$

a dá se obhájit i pro reálný exponent: $(ab)^c = e^{c\,ln(ab)} = e^{c(\ln a + \ln b)} = e^{c\,\ln a + c\,\ln b} = e^{c\,\ln a} e^{c\,\ln b} = a^c b^c$.

Derivace mocniny. Derivaci funkce $f(x) = x^c$ můžeme spočítat takto: $(x^c)' = \left(e^{c\,\ln x}\right)' = e^{c\,\ln x}\, c\frac{1}{x} = cx^c/x = cx^{c-1}$. Dále derivace funkce $r(x) = a^x$ je $(a^x)' = \left(e^{x\,\ln a}\right)' = e^{x\,\ln a}\,\ln a = a^x\,\ln a$.

Logaritmus s obecným základem. Inverzní funkci k funkci $r(x) = a^x$ pro $a > 0$ nazýváme logaritmus o základu a a značíme ji $\log_a$. Má stejně jako přirozený logaritmus definiční obor $(0,\infty)$, také jeho graf prochází bodem $[1,0]$, ale pro $a \neq e$ pod jiným úhlem než 45°. Platí pro něj také vzorec (4): $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Tento vzorec umožní provádět násobení čísel x a y pomocí součtu logaritmů, přitom součet je počtářsky snadnější operace než násobení. Stačí tedy znát tabulku logaritmů a provádět součty logaritmů. Výsledek součtu je pak třeba inverzním pohledem do tabulky (tj. aplikací exponenciální funkce stejného základu) převést na hledaný součin xy. Logaritmus o základu 10 byl v nedávné matematické minulosti k tomuto účelu hojně používán a byl proto také tabelován v rozsáhlých tabulkách. V již zmíněném filmu „Marečku podejte mi pero“ Kroupa senior u tabule předvádí, že tyto tabulky pro takové násobení umí používat (85. minuta filmu). Na tomto principu převedení násobení na sčítání se také dříve používala logaritmická posuvná pravítka.

Nyní prosím sledujte mé duševní pochody: $x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x\,\ln a}$. Na obě strany rovnosti pošlu přirozený logaritmus a mám $\ln x = \log_a x\,\ln a$. Konečně po vydělení $\ln a$ dostávám:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

Je tedy vidět, že logaritmus o jakémkoli základu lze spočítat pomocí přirozených logaritmů. Kdykoli tedy v nějakém vzorečku uvidíme $\log_a$, vždy to můžeme nahradit výrazem ze vzorce (5), takže není nutné se nijak zvlášť zabývat dalšími vlastnostmi $\log_a$. Například derivaci spočítáme takto:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

V matematické analýze se většinou setkáváme jen s přirozeným logaritmem. V diskrétní matematice je občas potřeba použít také $\log_2$ nebo něco podobného.

5 Goniometrické funkce: definice a jejich vlastnosti

Goniometrické funkce cos, sin se dají definovat různými způsoby. Na MFF jsme je měli zavedené tuším sedmi vlastnostmi zhruba tak, že byla vyslovena věta: „existují jednoznačně dvě funkce s vlastnostmi 1 až 7“, kterou bylo nutno dokázat. Tyto funkce jsme pak nazvali cos a sin. Na střední škole jste se s těmito funkcemi seznámili asi spíše jen „obrázkově“ pohledem na odpovídající pravoúhlý trojúhelník. V tomto textu uvedeme ještě jiný přístup, ve kterém se ty funkce definuji přímo vzorcem a pak je třeba odvodit jejich vlastnosti. A docela přirozeným způsobem pak dostaneme i ten středoškolský obrázek.

Definice cos a sin. Vzorec (2) můžeme považovat za definiční vzorec funkce e^x a všimneme si, že tento vzorec je možné použít nejen pro libovolné reálné x, ale také pro libovolné komplexní x. Řada (2) absolutně konverguje pro jakékoli číslo $x \in \mathbb{C}$. Dodatek 12 ukazuje, že základní vlastnosti mocniny $e^{x+y} = e^x e^y$, $(e^x)^y = e^{xy}$ platí i pro takto definované komplexní exponenty x, y. Jsme schopni dosazením do vzorce (2) například vyhodnotit:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{6}$$

Funkci cos v bodě $x \in \mathbb{R}$ definujeme jako reálnou část komplexního čísla e^{ix} a funkci sin v bodě $x \in \mathbb{R}$ definujeme jako imaginární část e^{ix}. Máme tedy:

$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}), \quad \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}), \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Podíváme-li se na reálnou a imaginární část vzorečku (6), dostáváme nástroj na výpočet hodnot funkcí sin, cos v bodě $x \in \mathbb{R}$ s libovolnou stanovenou přesností:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \tag{7}$$

Geometrická interpretace cos a sin. Pro geometrickou představu, co vyjadřují funkce sin, cos, musíme vědět, že komplexní číslo e^{ix} má velikost 1 (tj. leží na jednotkové kružnici) a argument (tj. úhel) tohoto komplexního čísla se přímo rovná x. Proč tomu tak je vysvětluje podrobně dodatek 12. Můžeme si tedy představit, že máme provázek délky x, jeho začátek umístíme do bodu $[1, 0]$ a omotáme tím provázkem jednotkovou kružnici (při kladném x tak činíme v kladném směru rotace, tj. proti směru hodinových ručiček). Konec provázku se pak octne v čísle e^{ix}. Nakreslete si spojnici takového čísla e^{ix} s počátkem a dále souřadnicové osy a úsečky vyjadřující reálnou a imaginární část tohoto čísla. To, co dostanete, je pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 1, který vám jistě připomene „definiční“ obrázek funkcí cos a sin známý ze střední školy.

Základní vlastnosti cos a sin. Protože číslo e^{ix} leží na jednotkové kružnici, máme odvozen vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Dále ze základní vlastnosti mocniny (ověřené v dodatku 12) plynou okamžitě součtové vzorce:

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} e^{ib}, \text{ takže:} \\ \cos(a+b) + i \sin(a+b) &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b), \\ \text{reálná část: } \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \text{imaginární část: } \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{aligned} \tag{8}$$

Vzoreček Moivreovy věty je přímý důsledek druhé základní vlastnosti mocniny:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

Protože $e^{0i} = 1$ a reálná část této jedničky je 1, máme $\cos 0 = 1$. Imaginární část této jedničky je 0, takže $\sin 0 = 0$. Dále je v dodatku 12 obhájena platnost důležité limity:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Z ní, z definice derivace a ze součtových vzorců snadno odvodíme, že $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{2} \frac{\sin h}{h} = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= -\sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = -\sin x,$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x,$$

Definičním oborem funkcí sin, cos je $\mathbb{R}$, oborem hodnot je interval $\langle -1, 1\rangle$. Protože mají konečnou derivaci na celém svém definičním oboru, jsou na něm spojité. Z představy provázku omotaném kolem jednotkové kružnice dále vidíme, že funkce cos, sin jsou periodické funkce s periodou rovnou délce jednotkové kružnice a to je 2π. Limity těchto funkcí v krajních bodech definičního oboru $\pm\infty$ neexistují. Funkce přecházejí jedna v druhou jednak pomocí vzorce $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ a také z faktu, že $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

Další důležité hodnoty těchto funkcí jsou shrnuty v tabulce 5.1 a dají se odvodit středoškolským způsobem z Pythagorovy věty a z vlastností příslušných pravoúhlých trojúhelníků s úhly při přeponě postupně 30°, 45° a 60°. Ze symetrií grafů funkci sin, cos lze odvodit vztahy

$$\cos x = \cos(x + 2\pi), \quad \sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}), \quad \cos x = \cos(-x), \quad \sin x = -\sin(-x).$$

a pomocí těchto vzorců pak umíme najít hodnoty goniometrických funkcí v dalších bodech mimo body přímo zmíněné v tabulce 5.1, ale jsou to jen vzhledem k symetriím grafu příslušným způsobem posunuté tabulkové body. Dále můžeme použít vzorce na poloviční nebo dvojnásobný úhel (n-násobný úhel) odvozené ze součtových vzorců (8). Pokud ovšem hledáme hodnotu sin nebo cos mimo takové body, pak pro ně přímé vzorce vyjádřené racionálním číslem či odmocninami neexistují a je třeba použít vzorce (7).

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
pomůcka $\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabulka 5.1 Hodnoty funkcí sin, cos ve vybraných bodech. Pomůcka k zapamatování: sin je na $\langle 0, \pi/2\rangle$ rostoucí, pište tedy 0, 1, 2, 3, 4, doplňte odmocniny a vydělte dvěma.

Funkce tg a cotg. Tyto funkce jsou definované vzorci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Jmenovatel ve vzorci pro tg je nulový (vzorec selže) v bodech $\pi/2 + k\pi$, takže definičním oborem funkce tg stanovíme množinu $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Limity v krajních bodech definičního oboru, tj. limity v bodech vyňatých z definičního oboru jsou zprava $-\infty$ a zleva ∞. Funkce tg je na každé souvislé části svého definičního oboru spojitá a rostoucí. Jejím oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Analogicky si rozmyslíme vlastnosti cotg: definičním oborem je $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, limity v krajních bodech definičního oboru zprava jsou ∞ a zleva $-\infty$, funkce je spojitá a klesající na každé souvislé čísti svého definičního oboru. Jejím oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Derivaci spočítáme podle věty o derivaci podílu, například:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{cosx}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Cyklometrické funkce arccos, arcsin, arctg, arccotg. Redukujeme-li definiční obor funkce cos na interval $\langle 0, \pi\rangle$, funkce sin na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, funkce tg na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ a funkce cotg na interval $(0, \pi)$, dostáváme prosté funkce. Inverzní funkce k nim jsou po řadě arccos, arcsin, arctg a arccotg. Jejich definiční obory jsou po řadě $\langle -1, -1\rangle$, $\langle -1, -1\rangle$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, protože to jsou obory hodnot původních funkcí. Vzorce pro jejich derivace se odvodí z věty o derivaci inverzní funkce. Na svém definičním oboru jsou tyto funkce spojité, protože jsou inverzní ke spojitým funkcím. Limity v krajních bodech definičních oborů těchto funkcí si čtenář jistě doplní sám. Derivace spočítáme pomocí věty o derivaci inverzní funkce. Například pro $y = \operatorname{tg} x$ je:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

6 Limita je nástroj k uchopení nekonečna

V této sekci se budeme podrobně zabývat významem sdělení $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Je to základní stavební kámen při budování matematické analýzy, limitu potřebujeme například k definici derivace a pomocí derivace provádíme mimo jiné analýzu funkcí.

Pro začátek předpokládejme, že limitní bod a i limitní hodnota L jsou konečná čísla. Pak výrazem $\lim_{x \to a} f(x) = L$ chceme říci, že pokud bereme vzory funkce f *nekonečně blízko* bodu a, ale *vyhneme se* přímo bodu a, pak jsou funkční hodnoty *nekonečně blízko* bodu L. Toto není přesná definice, jen intuitivní formulace, která nám pomůže snáze pochopit, o co tady jde. Matematici používali kalkulus asi sto let jen na základě takové intuitivní představy. Teprve později objevil Weierstrass formulaci, pomocí které vyměnil intuitivní pojmy *nekonečně blízko*, resp. *nekonečně malá veličina* za přesnou a elegantní definici, jíž se zde také budeme zabývat. Tato definice se pak ve školách předkládá studentům jako fakt a většinou se zatají skutečnost, že matematikům trvalo více než sto let, než na ni přišli. Ale studenti ji mají chápat okamžitě.

Hromadný bod, okolí bodu. Abychom mohli volit vzory funkce f „nekonečně blízko" bodu a, musí ležet bod a uvnitř definičního oboru funkce nebo aspoň „nekonečně blízko" definičního oboru, tedy na jeho hranici. Vyhýbáme se při volbě vzorů přímo bodu a, takže bod a samotný nemusí ležet v definičním oboru (a typicky taky neleží, protože jinak, jak ukážeme později, je počítání limity celkem nudné). Skutečnost umístění bodu a „nekonečně blízko" definičnímu oboru D lze přesně popsat pomocí pojmu *hromadný bod*: Bod a je hromadným bodem množiny D, pokud pro libovolné okolí bodu a existuje uvnitř tohoto okolí nějaký prvek $x \in D \setminus \{a\}$.

Ilustrace okolí bodu je názornější v případě bodů v rovině. Opusťme na chvíli reálnou osu a představujme si okolí bodu v rovině. Okolí bodu a je kruh se středem v bodě a, přesněji množina bodů vzdálená od bodu a maximálně o nějakou kladnou konstantu r. Abychom ověřili, že bod a je hromadným bodem množiny D, zapíchneme do bodu a kružítko a nastavíme nějaký poloměr r a narýsujeme kruh. Najdeme-li v něm nějaký bod množiny D (mimo střed a), pak musíme zvolit další okolí, tj. stejný střed, ale jiný poloměr. Pochopitelně nemá smysl se v dalším kroku zabývat okolími s větším poloměrem než prve, protože tam jistě taky bude stejný bod z množiny D. Je tedy účelné testovat okolí s menším poloměrem. Najdeme-li v něm zase bod z množiny D, je třeba otestovat další okolí s ještě menším poloměrem. Pokud *vždy* najdeme v narýsovaném kruhu (stále menším a menším) nějaký bod z D (mimo střed), pak a je hromadným bodem množiny D. Problém je, že naše práce s kružítkem by v takovém případě trvala nekonečně dlouho. Je to tím, že vždy musíme volit *kladný* poloměr, tj. v dalším kroku určitě půjde najít nějaký menší kladný poloměr. Na druhou stranu, když se povede najít okolí, ve kterém (mimo střed a) neleží žádný bod z D, máme v konečném čase výsledek, že a není hromadným bodem množiny D.

Okolí bodu a na reálné ose je definováno stejně: množina bodů nejvýše vzdálených od bodu a o nějakou kladnou konstantu r, tedy interval $(a - r, a + r)$. Kružítko můžeme mít zapíchnuté do bodu a stejně jako prve, ale rýsujeme jím jen dva limitní body na reálné ose.

Definice limity. Vraťme se nyní k výrazu $\lim_{x \to a} f(x) = L$ s konečnými čísly a a L. Aby to vůbec dávalo nějaký smysl, musí být a hromadným bodem definičního oboru D funkce f. Weierstrassova definice této limity zní: *pro každé* okolí U bodu L *existuje* okolí V bodu a tak, že kdykoli je $x \in D \cap V \setminus \{a\}$, pak je $f(x) \in U$. Tuto definici lze po rozepsání pojmu okolí přeformulovat na tvar:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad x \in D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

V této formulaci jsme pro poloměry příslušných okolí použili klasické a staletí používané označení ε a δ. Říká se tomu proto také epsilon-delta definice.

Nyní si uvědomíme, jak tato definice funguje, kam se vytratil původně intuitivní pojem „nekonečně blízko". Především díky tomu, že a je hromadným bodem D, je průnik množin v definici vždy neprázdný, takže vždy existuje aspoň jedno x pro které má smysl se ptát, zda $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Ale jádro Weierstrassovy myšlenky je skryto jinde, v pořadí dvou kvantifikátorů $\forall$ $\exists$. To rozehrává hru dvou hráčů:

v zájmu prvního je prokázat, že limita neexistuje nebo není rovna L. V zájmu druhého je obhájit, že limita je rovna L. První hráč začíná a vynáší nějaké $\varepsilon > 0$. Druhý má za úkol najít takové $\delta > 0$, že se všechny definované funkční hodnoty se vzory z $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ schovají do intervalu $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Když se mu to povede, pokračuje první hráč. Ten ví, že nemá smysl volit větší ε než prve, protože protihráči by pak stačilo odpovědět stejným δ, jako prve. Takže volí ε menší. Na to zareaguje druhý hráč případně jiným δ, pak hraje zase první hráč atd. Takto se hráči mohou bavit nekonečně dlouho, pokud limita existuje a je rovna L. Hra končí, pokud se povede prvnímu hráči dát soupeři mat, tj. najít takové $\varepsilon > 0$, že soupeř nemá šanci najít potřebné $\delta > 0$, tj. limita se nerovná L nebo neexistuje.

To vypadá, že Weierstrass svou definicí jen přešel z bláta do louže, protože intuitivní frázi „nekonečně blízko" nahradil nekonečným soubojem dvou hráčů, takže se intuitivního pojmu „nekonečno" nezbavil. To není pravda. Snaha druhého hráče totiž je vymyslet univerzální algoritmus, jak pro jakékoli $\varepsilon > 0$ vytvořit δ požadovaných vlastností. Je-li to konečný algoritmus, typicky nějaký vzorec, pak stačí ověřit, že tento vzorec funguje pro obecné $\varepsilon > 0$ a hra končí. První hráč nemá šanci vyhrát, uvědomí si to pohledem na protihráčův algoritmus a položí krále. To se stane v konečném čase. Limita existuje a je rovna L. Elegantním způsobem jsme se zbavili intuitivního nekonečna. Dokážete to ocenit? Pokud ne, není Weierstrassova definice limity určena pro Vás.

Uvedeme dva příklady, které vypadají, že jsou o ničem, ale přitom jsou základem počítání limit.

Příklad 6.1 Limita konstanty. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána vzorcem $f(x) = c$. Pak pro jakékoli $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Dokážeme to z Weierstrassovy definice limity. Ta se dá přeformulovat do tvaru:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

Tady to první hráč vzdává ještě před prvním tahem, protože vidí, že c bude ležet v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ pro jakékoli $\varepsilon > 0$. Druhý hráč nemusí nic dělat. Pokud by přeci jenom první hráč táhnul, druhý z nich zvolí třeba $\delta = 42$. Je tedy $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

Příklad 6.2 Dosazení konečné hodnoty. Dokážeme $\lim_{x\to a} x = a$. Rozepsání definice vypadá takto:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Druhý hráč si připraví algoritmus na výrobu δ, když dostane $\varepsilon > 0$. Ten algoritmus zní: $\delta = \varepsilon$. Nyní při pohledu na část definice $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} \Longrightarrow x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ to první hráč vzdává. Limita tedy je rovna a.

Zavedení symbolů ∞ a $-\infty$. Definice limity nabírá na ještě větší eleganci, pokud zobecníme pojem okolí bodu a i pro případy $a = \infty$ a $a = -\infty$. Pak můžeme připustit, že se ve výrazu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ vyskytuje symbol ∞ nebo $-\infty$ v místě a, v místě L nebo na obou těchto místech.

Okolí bodu ∞ definujeme jako všechna reálná čísla větší než stanovená mez $M \in \mathbb{R}$. Okolí bodu $-\infty$ jsou všechna reálná čísla menší než stanovená mez $M \in \mathbb{R}$. Všimněte si, že tím jsme do analýzy zavedli znaky ∞ a $-\infty$ použitelné v limitách, tj. při počítání limit. Přitom na jejich zavedení jsme intuitivní pojem „nekonečno" nepotřebovali. Opravdu, nepotřebujeme píchat kružítkem kamsi do nekonečna (což ani nejde), stačí nám nakreslit na reálné ose bod M a prohlásit za okolí bodu ∞ všechna čísla větší než tento bod. Budeme se znaky ∞ a $-\infty$ nadále zacházet důsledně v souladu s Weierstrassovou definicí limity, a tím se neopíráme o žádnou intuici.

Reformulace Weierstrassovy definice v případě, že některé okolí je okolím bodu ∞ nebo $-\infty$ vyžaduje v daném místě definice opustit poloměry $\varepsilon > 0$ či $\delta > 0$ a nahradit je mezemi $M \in \mathbb{R}$ resp. $K \in \mathbb{R}$ a příslušnost x nebo $f(x)$ danému okolí formulovat pomocí odpovídající nerovnosti.

Příklad 6.3 Dosazení nekonečna. Ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} c = c$, $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Rozepíšeme první limitu:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} \quad x > M \Longrightarrow c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

Vidíme, že to platí pro všechna $\varepsilon > 0$ a jakoukoli volbu M, například $M = 42$. Druhá limita:

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\, M \in \mathbb{R} \quad x > M \Longrightarrow x > K.$$

Druhý hráč si připraví algoritmus $M = K$ a první hráč se vzdává. Limita existuje a je rovna ∞.
Třetí limita:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} \quad x > M \Longrightarrow \frac{1}{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Rozhodneme se jako druhý hráč volit M aspoň větší než 0, ale to nebude stačit. Závěrečné sdělení v definici přepíšeme pomocí nerovností na $-\varepsilon < 1/x < \varepsilon$. Protože je $x > M > 0$ a také $\varepsilon > 0$, platí určitě $-\varepsilon < 0 < 1/x$. Potřebujeme ještě zajistit platnost druhé nerovnosti. Vynásobíme ji x a vydělíme ε (obojí jsou kladná čísla) a dostaneme $1/\varepsilon < x$. Stačí tedy volit $M = 1/\varepsilon$ (to je algoritmus druhého hráče) a bude platit, že pro $x > M = 1/\varepsilon$ je $1/x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. První hráč se vzdává a limita je tedy rovna nule.

Třetí limita intuitivně říká, že po vydělení jedničky nekonečně velkým číslem dostáváme číslo nekonečně blízko nule. Ale výpočet není vůbec postaven na intuici, ale na použití exaktní definice limity.

Analogicky bychom mohli prozkoumat tyto limity pro $x \to -\infty$.

Limity zprava a zleva. Intuice pro limitu říká, že když se k bodu $a \in \mathbb{R}$ blížíme nekonečně blízko, jsou funkční hodnoty nekonečně blízko L. Pod slovem „blížíme" si můžeme představit nějaké nekonečné putování k bodu a, které můžeme zahájit zprava nebo zleva od bodu a. A nyní přesně: když redukujeme okolí bodu a jen na body z tohoto okolí, ale větší než a, máme pravé okolí bodu a. Je to interval $(a, a+\delta)$. Naopak, interval $(a-\delta, a)$ je levé okolí bodu a. Pokud druhý hráč místo okolí bodu a používá pravé okolí bodu a, dostaneme limitu zprava, značíme ji $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Pokud používá levé okolí, dostaneme limitu zleva, značíme ji $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Poznamenejme, že $\lim_{x\to\infty} f(x)$ je vždy limitou zleva a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ je vždy limitou zprava, ačkoli to explicitně neříkáme a ani neznačíme.

Příklad 6.4 Limita k bodu dělení nulou. Ukážeme, že $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$ a $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Začneme prvním případem, který přepíšeme pomocí definice limity zprava:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\,\delta > 0 \quad x \in (0, \delta) \Longrightarrow \frac{1}{x} > M.$$

Kdyby první hráč zvolil nekladné M, máme na to odpověď $\delta = 42$ a podmínka v definici je splněna. Co když ale zvolí M kladné? Protože $x \in (0, \delta)$, je x kladné a $\delta > x$. Máme ukázat, že pak $1/x > M$, což je ekvivalentní s nerovností $1/M > x$. Volíme-li tedy $\delta = 1/M$, budeme mít algoritmus na výrobu δ i pro kladné M, který zaručí platnost závěrečného tvrzení. Limita je tedy rovna ∞. Přepíšeme druhý případ podle definice limity zleva:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\,\delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Longrightarrow \frac{1}{x} < M.$$

Kdyby první hráč zvolil nezáporné M, máme na to odpověď $\delta = 42$ a podmínka v definici je splněna. Co když ale zvolí M záporné? Protože $x \in (-\delta, 0)$, je x záporné a $-\delta < x$. Máme ukázat, že pak $1/x < M$, což je ekvivalentní s nerovností $1/M < x$ (dvakrát jsme násobili záporným číslem). Volíme-li tedy $\delta = -1/M$, budeme mít algoritmus na výrobu δ i pro záporné M, který zaručí platnost závěrečného tvrzení. Limita je tedy rovna $-\infty$.

Jakmile limita zprava se nerovná limitě zleva, limita oboustranná neexistuje. To je tento případ. Intuitivní sdělení tohoto příkladu říká: dělíme-li jedničku číslem nekonečně blízkým nule, ale kladným, máme nekonečný výsledek. Dělíme-li jedničku číslem nekonečně blízkým nule, ale záporným, máme výsledek v blízkosti mínus nekonečna.

Příklad 6.5. Ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje. Tentokrát vítězí první hráč hned prvním tahem, ačkoli si tipneme jakoukoli hodnotu limity. Tipneme-li si hodnotu ∞, stačí prvnímu hráči zvolit mez $K = 2$. Je totiž zřejmé, že všechny funkční hodnoty funkce $\sin x$ jsou menší než 2, takže leží zcela mimo okolí bodu ∞ stanovené mezí 2. Analogicky pro hodnotu $-\infty$ zahájí první hráč hru volbou meze $K = -2$ a druhý hráč je namydlený. Měla-li by být limita nějaké číslo $c > 0$, zvolí první hráč $\varepsilon = c/2$, takže nulové hodnoty jsou mimo interval $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Jenže funkce $\sin x$ se k nulovým hodnotám vrací pro každé $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Takže se nám nepodaří najít mez $M \in \mathbb{R}$ tak, aby pro $x > M$ byly všechny funkční hodnoty $\sin x$ uvnitř intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Podobně to vypadá pro $c < 0$, kdy první hráč volí $\varepsilon = -c/2$. Konečně limita nemůže být rovna nule, protože první hráč zvolí $\varepsilon = 1/2$, takže jedničkové hodnoty jsou mimo interval $(-1/2, 1/2)$. Jenže funkce $\sin x$ se k jedničkovým hodnotám tvrdohlavě opakovaně vrací v bodech $\pi/2 + 2k\pi$. Nelze tedy najít mez M, aby funkce měla pro všechny $x > M$ své hodnoty uvnitř intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Příklad 6.6 limity v krajních bodech definičního oboru exp. O funkci e^x víme, že je rostoucí a všude kladná. Ukážeme, že $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ a $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. První limitu podle definice rozepíšeme na

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} \quad x < M \Longrightarrow e^x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Nerovnost $e^x > -\varepsilon$ je splněna vždy, protože e^x je kladná. Pro dané ε tedy stačí najít M aby pro $x < M$ bylo $e^x < \varepsilon$. Zlogaritmováním této nerovnosti (logaritmus je rostoucí) dostáváme $x < \ln\varepsilon$. Takže stačí volit $M = \ln\varepsilon$.

Druhou limitu přepíšeme podle definice na

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R} \quad x > M \Longrightarrow e^x > K.$$

Zlogaritmováním poslední nerovnosti máme $x > \ln K$, takže pro dané K stačí volit $M = \ln K$.

Limity posloupností. Posloupnost není nic jiného než funkce s definičním oborem $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Místo zápisu funkční hodnoty $f(n)$ je obvyklejší v tomto případě psát f_n. Limity funkcí pro $x \to a$ lze počítat jen pro takové body a, které jsou hromadnými body definičního oboru. Definiční obor $\mathbb{N}$ má jediný hromadný bod a tím je ∞. Limity posloupností tedy můžeme počítat výhradně pro $x \to \infty$. Přepis obecné definice limity pak vypadá například pro konečnou hodnotu L takto:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}, n > M \Longrightarrow f_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Místo podmínky $n > M$ se píše $n \geq n_0$, přitom n_0 je první přirozené číslo větší než mez M. A s podmínkou $f_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ se často setkáváme v ekvivalentním tvaru $|f_n - L| < \varepsilon$. Takže definice limity posloupnosti pro konečné L zní:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Longrightarrow |f_n - L| < \varepsilon$$

Protože často posloupnostmi výuka matematické analýzy začíná, je toto asi první definice limity, kterou přitom studenti potkají. K tomu jsou samozřejmě připojeny formulace pro případ, že $L = \infty$ nebo $L = -\infty$, při nichž musíme místo okolí o poloměru ε použít okolí nekonečna s mezí $K \in \mathbb{R}$. Třeba pro $L = \infty$ definice vypadá takto:

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Longrightarrow f_n > K$$

Této skutečnosti se říká, že „posloupnost roste nade všechny meze“, protože zvolíte-li jakkoli velikou mez K, od jistého n_0 se posloupnosti podaří ji přerůst.

Cauchyovské posloupnosti. Motivaci k zavedení tohoto pojmu byla potřeba nějak korektně přejít z racionálních čísel (se kterými umíme počítat) k reálným číslům. Tj. definovat reálná čísla. Ukazuje se, že libovolné reálné číslo může být limitou posloupnosti racionálních čísel. Protože ale pro L iracionální neumíme racionálním způsobem vypočítat $|f_n - L|$ (jsme v situaci, kdy teprve chceme reálná čísla definovat), potřebujeme jinak poznat, že posloupnost je konvergentní. Ukazuje se, že k tomu slouží Bolzanova-Cauchyova podmínka:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m, n > n_0 \Longrightarrow |f_n - f_m| < \varepsilon$$

Posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá Cauchyovská. Množinu reálných čísel je pak možné definovat jako množinu všech Cauchyovských posloupností racionálních čísel, ovšem musíme mezi sebou ztotožnit všechny Cauchyovské posloupnosti, které konvergují ke stejné hodnotě. Součet, rozdíl, součin a podíl reálných čísel se pak definuje jako limita součtu, rozdílu, součinu a podílu odpovídajících Cauchyovských posloupností racionálních čísel.

Cauchyovské posloupnosti racionálních čísel tedy mohou konvergovat k něčemu novému, i k iracionálním číslům. Na druhé straně Cauchyovské posloupnosti reálných čísel už k ničemu novému nekonvergují, výsledkem jsou zase jen reálná čísla. Množinám s touto vlastností se říká úplné. Množina reálných čísel je úplná. Pro reálná čísla platí tvrzení: posloupnost má konečnou limitu, právě když pro ni platí Cauchyovská pomínka.

Heineho věta. Intuitivně: při vyhodnocení $\lim_{x\to a} f(x)$ je třeba se projít k bodu a a přitom samotnému bodu a se musíme vyhnout, ale „nekonečně blízko“ se k němu přiblížit. Je potřeba tuto procházku provést podél všech reálných čísel z definičního oboru funkce f, které jsou „nekonečně blízko“ bodu a. Když procházku provedeme jen podél některých takových reálných čísel nekonečně se blížících k bodu a, pak zákonitě musíme dojít ke stejnému výsledku. Přesněji znění Heineho věty: Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = L$ pak pro každou posloupnost x_n splňující $x_n \to a$, $x_n \neq a$ je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Věta platí i obráceně, ale musíme skutečně použít všechny posloupnosti x_n s uvedenou vlastností, nestačí jen některé. Například posloupnost $x_n = n\pi$ splňuje $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$, ale z faktu že $\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ nemůžeme soudit, že $\lim_{x\to\infty} \sin x = 0$. V příkladu 6.5 jsme ukázali, že tato limita neexistuje. A skutečně, pokud zvolíme jinou $y_n = \pi/2 + 2n\pi$, která splňuje $y_n \to \infty$, $y_n \neq \infty$, shledáme, že $\lim_{n\to\infty} \sin y_n = 1$. Platí, že pokud se toto přihodí (procházka ke stejnému bodu podél různých posloupností dává různé výsledky), máme záruku, že zkoumaná limita funkce neexistuje.

7 Spojitost, počítání limit

Věta o limitě $+ - \cdot /$. Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ je hromadným bodem definičních oborů funkcí f a g. Pak platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x),$$
$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

za předpokladu, že existují limity na pravých stranách rovností a příslušná operace na pravé straně rovnosti je přípustná. Přípustné operace jsou operace s konečnými čísly s výjimkou dělení nulou a dále některé operace se symboly ∞ a $-\infty$ vyjmenované v textu níže v odstavci „počítání limit: pravidla pro nekonečno“. Je-li tento předpoklad splněn, je zaručena existence limit na levých stranách rovností.

Toto je zcela zásadní věta, o kterou se často opírá argumentace v následujícím textu, kde budeme hovořit o spojitosti a o metodách počítání limit. Její důkaz je technický a celkem nudný a najdete jej v každé učebnici matematické analýzy. Důkaz se pochopitelně opírá o definici limity.

Spojitost funkcí. Připomínám, že funkce f je spojitá v bodě a, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, funkce je spojitá na intervalu, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu. Dále z příkladů 6.1 a 6.2 plyne, že konstantní funkce $f(x) = c$ a identická funkce $f(x) = x$ jsou spojité pro libovolné $a \in \mathbb{R}$, tedy jsou spojité na $\mathbb{R}$. Dále z věty o limitě $+ - \cdot /$ plyne, že funkce daná jakýmkoli vzorečkem obsahujícím konstanty, proměnnou x a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení je spojitá na svém definičním oboru. Ilustrujeme si to na příkladu.

Příklad 7.1. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná vzorečkem $f(x) = x^2 - 5x$ je spojitá na svém definičním oboru. Je to proto, že:

$$\lim_{x\to a} x^2 - 5x = \lim_{x\to a} x \cdot x - \lim_{x\to a} 5x = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} 5 \lim_{x\to a} x = a \cdot a - 5 \cdot a = a^2 - 5a.$$

Užili jsme zmíněnou větu a výsledky příkladů 6.1 a 6.2. To, co jsme právě předvedli, nazývám „dosazovací pravidlo“ a je to základní nástroj pro počítání limit.

Věta o limitě $+ - \cdot /$ má důležitý dovětek, že jednotlivá tvrzení platí, pokud příslušná operace s hodnotami limit je přípustná. Když jsou tyto hodnoty limit konečné a nedělí se nulou, pak jsou všechny operace přípustné a dosazovací pravidlo funguje bez překážek. To znamená, že lze dosadit do libovolného vzorečku obsahující sčítání, odčítání, násobení, dělení, a mimo dělení nulou máme zaručený výsledek. Funkce dané takovými vzorci jsou tedy na svém definičním oboru spojité, protože k dělení nulou dochází jen v bodech, kde funkce samotná není definovaná, a tam se na spojitost neptáme.

Dokonce máme ještě silnější výsledek: všechny elementární funkce exp, ln, $\sqrt{}$, cos, arccos atd. zmíněné v sekcích 3 až 5 jsou spojité na svém definičním oboru, dále platí věta o tom, že složení spojitých funkcí je spojitá funkce. Když toto vše dáme dohromady, vidíme, že jakýkoli vzoreček obsahující proměnnou, konstanty a elementární funkce jakkoli do sebe vnořené definuje spojitou funkci. Lapidárně řečeno: chcete-li zadat funkci jediným takovým vzorečkem, nespojitou funkci nevyrobíte.

Je pravda, že spojitost poznáme podle souvislosti grafu funkce. Někdo může namítnout, že třeba funkce $f(x) = 1/x$ není spojitá, protože nemá všude souvislý graf, ovšem to není pravda. O spojitosti mluvíme jen na definičním oboru funkce. V bodě 0 tato funkce není definovaná, takže otázku na její spojitost v tomto bodě vůbec nepokládáme. Něco jiného by bylo, kdybychom této funkci přidali dodatečnou funkční hodnotu třeba $f(0) = 17$, Pak je nová funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ a v bodě 0 spojitá není. Limita v bodě 0 neexistuje, zatímco funkční hodnota je 17.

Nespojité funkce. Nespojitou funkci můžeme zadat tak, že v algoritmu pro výpočet hodnoty funkce použijeme více než jeden vzoreček. Typickým příkladem je funkce sgn zadaná třemi vzorečky:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

„Na rozhraní“ vzorečků pak může vzniknout nespojitost. V tomto příkladě je zřejmě $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, takže limita (oboustranná) v bodě 0 neexistuje. Na rozhraní vzorečků můžeme spočítat jednostranné limity dosazením do příslušného vzorečku, protože věta o limitě $+-\cdot/$ platí i pro jednostranné limity. Funkce $\operatorname{sgn} x$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ spojitá, ale v bodě 0 spojitá není.

Jiným příkladem nespojité funkce je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou stanovíme $f(x) = 0$ pro x racionální a $f(x) = 1$ pro x iracionální. Tato funkce není spojitá v žádném bodě svého definičního oboru, limity (dokonce ani jednostranné) neexistují. Můžeme to zdůvodnit z Heineho věty. Pro $a \in \mathbb{Q}$ máme $\lim_{n\to\infty} f(a+1/n) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} f(a+\sqrt{2}/n) = 1$, takže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje. Pro $a \notin \mathbb{Q}$ je naopak $\lim_{n\to\infty} f(a+1/n) = 1$. Dále mezi a a $a+1/n$ se jistě nalézají čísla $x_n \in \mathbb{Q}$, pro něž pak je $x_n \to a$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, takže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Počítání limit: pravidla pro nekonečno. Pokud některá limita na pravé straně některé rovnosti z věty o limitě $+-\cdot/$ má hodnotu ∞ nebo $-\infty$, stále může být příslušná operace přípustná. Seznam takových operací následuje a je součástí „rozšířeného dosazovacího pravidla“ při počítání limit. Pro $A, B, C \in \mathbb{R}$, $B > 0$, $C < 0$ platí:

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad A + \infty = \infty, \quad A - \infty = -\infty,$$
$$B \cdot \infty = \infty, \quad C \cdot \infty = -\infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad -\infty \cdot \infty = -\infty,$$
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = \infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Každý z těchto výrazů byl našimi matematickými předky nejprve dokázán z definice limity a poté jej můžeme při počítání limit při dosazování používat. Například poslední dva výrazy jsme dokázali v příkladu 6.4. Nebudeme dokazovat všechno, následující příklad ukazuje důkaz jen jednoho dalšího pravidla pro ilustraci, abychom viděli, jak se to dělá pořádně. Na druhou stranu je celkem zřejmé, že tyto vzorečky není nutné se učit bezmyšlenkovitě zpaměti, protože z intuitivního uvažování o „nekonečně velkých“ a „nekonečně malých“ veličinách nám jistě vytanou na mysli tytéž vzorce.

Příklad 7.2. Dokážeme dosazovací pravidlo $A + \infty = \infty$. Máme tedy přesně dokázat, že pokud $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, pak $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$. První dva předpoklady se dají podle definice limity rozepsat takto:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 \quad x \in D \cap (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon),$$
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta_2 > 0 \quad x \in D \cap (a-\delta_2, a+\delta_2) \setminus \{a\} \Longrightarrow g(x) > K.$$

Máme dokázat:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \quad x \in D \cap (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) + g(x) > M.$$

Dostaneme od prvního hráče M a v roli druhého hráče máme vymyslet algoritmus, jak z toho M vyrobit δ požadovaných vlastností. Z existence první limity víme, že pro volbu $\varepsilon = 1$ bude existovat δ_1 tak, že pro $x \in D \cap (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in (A-1, A+1)$, tedy zaručeně $f(x) > A-1$. Díky existenci druhé limity víme, že když zvolíme $K = M - A + 1$, pak bude existovat δ_2 takové, že pro $x \in D \cap (a-\delta_2, a+\delta_2) \setminus \{a\}$ je $g(x) > M - A + 1$. Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ budou platit obě nerovnosti současně. Sečteme-li je, dostáváme $f(x) + g(x) > A - 1 + M - A + 1 = M$. Takže máme algoritmus na výrobu δ a skutečně je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$. Povšimneme si, že jsme vzorec dokázali jen pro konečný bod $a \in \mathbb{R}$, ale kdyby mělo být $a = \infty$ nebo $a = -\infty$, postup důkazu by byl skoro stejný. Obecně se v těchto důkazech pracuje s okolím U_1 bodu a a s okolím U_2 bodu a v předpokladech a v závěru se sestaví okolí $U = U_1 \cap U_2$ bodu a, pro nějž platí obě nerovnosti současně.

Důkazy vzorečků rozšířeného dosazovacího pravidla bývají obvykle v učebnicích skryty jako součást důkazu věty o limitě $+-\cdot/$ a tudíž při studiu může čtenáři snadno uniknout jejich klíčový význam. Díky těmto důkazům totiž máme exaktně podložená pravidla na počítání s nekonečny při vyhodnocování limit. Ilustrujeme si použití tohoto kalkulu v následujícím příkladě.

Příklad 7.3. Spočítáme následující dvě limity.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-127}{-17} = \frac{\infty\cdot\infty+5\cdot\infty-127}{-17} = \frac{\infty+\infty-127}{-17} = \frac{\infty-127}{-17} = \frac{\infty}{-17} = \frac{-1}{17}\cdot\infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^2} = \frac{-3}{0^+} = -3\cdot\frac{1}{0^+} = -3\cdot\infty = -\infty.$$

Protože se ve vzorečcích při počítání limit vyskytují elementární funkce exp, ln, $\sqrt{\ }$, tg, arctg a další, je třeba znát jejich limity v krajních bodech jejich definičních oborů. Pak je možné rozšířit rozšířené dosazovací pravidlo o další vzorce odpovídající hodnotám těchto limit. Například $e^{-\infty} = 0$, $e^{\infty} = \infty$, $\ln 0^+ = -\infty$, $\ln\infty = \infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$, $\mathrm{tg}(\pi/2)^- = \infty$, $\mathrm{tg}(\pi/2)^+ = -\infty$, $\mathrm{arctg}\,\infty = \pi/2$ atd. První dva vzorce jsme ověřili v příkladě 6.6, ostatní by bylo třeba ověřit podobným způsobem. Upozorňuji ale, že definiční obory těchto funkcí v žádném případě nerozšiřujeme o krajní body a neprohlašujeme, že funkční hodnota nějaké funkce v nějakém bodě je nekonečno. Existuje dobrý důvod nechat funkce takové, jaké jsou jen s konečnými funkčními hodnotami. Uvedené vzorečky je možno použít výhradně jen v kontextu počítání limit v rozšířeném dosazovacím pravidle. Proto takové výrazy dávám při počítání limit do hranaté závorky, abych dal najevo, že jsem použil rozšířené dosazovací pravidlo.

Příklad 7.4. Ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} q^x = 0$ pro $q \in (0,1)$.

$$\lim_{x\to\infty} q^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln q} = [e^{-\infty}] = 0.$$

Je totiž $\ln q < 0$ pro $q \in (0,1)$. Ve škole jste se možná místo toho učili totéž zapisovat takto:

$$\lim_{x\to\infty} q^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln q} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \quad \text{(substituce } y = x\ln q\text{, přitom je } \lim_{x\to\infty} x\ln q = -\infty).$$

Měli-li bychom při počítání limit používat jen rozšířené dosazovací pravidlo jako v předchozích dvou příkladech, byla by to děsná nuda. Existují ovšem situace při počítání limit, se kterými se musíme vypořádat daleko sofistikovanějším způsobem. O nich je následující text. Studenti v písemkách potkávají výhradně tento další typ limit, protože učitelé nechtějí dělat písemku nudnou.

Počítání limit: neurčité výrazy.

V seznamu rozšířených dosazovacích pravidel některé situace, které ovšem nastat mohou, chybějí:

$$\infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

To jsou nepřípustné operace, pro které nám věta $+\,-\,\cdot/$ nedává žádnou záruku, jak to dopadne. Říkáme jim neurčité výrazy, protože to nakonec může dopadnout jakkoli. Například následující limity jsou při pokusu o dosazení typu $0/0$, ale mají různé výsledky: $\lim_{x\to0} x/x^2$ neexistuje, $\lim_{x\to0} x^2/x = 0$, $\lim_{x\to0} 17x/x = 17$, $\lim_{x\to0} x/x^3 = \infty$.

Dojde-li při pokusu o použití rozšířeného dosazovacího pravidla k neurčitému výrazu, je potřeba vzoreček přeformulovat tak, aby dával stejné hodnoty, ale bylo v něm patrné, že se dá něco krátit, odečíst atd. a tím se neurčitého výrazu zbavit. Ve výše uvedeném příkladu je zcela jasné, jak máme krátit, ale nejnapínavější to je v případech, kdy je třeba to krácení pomocí reformulace vzorečku nejdříve nějak obnažit. A tomu se věnují veškeré příklady na počítání limit, se kterými se studenti potýkají. Hlavní vzkazy pro počítání takových příkladů jsou: Po každé reformulaci vzorečku se pokuste o použití rozšířeného dosazovacího pravidla a uvědomte si, ve které části vzorečku zůstává neurčitý výraz. Pokud už tam žádný není, použijte rozšířené dosazovací pravidlo a máte výsledek. Pro různé situace existují ustálené postupy (např. rozšíření výrazem $1/1$ při problému $\infty-\infty$). Případ $0\cdot\infty$ se dá snadno převést na $0/0$ nebo ∞/∞. Na případy $0/0$ nebo ∞/∞ se dá někdy použít L'Hospitalovo pravidlo. Ovšem toto pravidlo, které využívá kalkulus na derivace, nelze použít, když teprve vzoreček pro tento kalkulus počítáním limity odvozujeme. To bychom se dostali do argumentačního kruhu.

Příklad 7.5. Spočítáme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5n + 16}{3n^2 + 17n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2(1 - \frac{5}{2n} + \frac{16}{2n^2})}{3n^2(1 + \frac{17}{3n})} =$$
$$= \left[\text{krácení } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(1 - \frac{5}{2n} + \frac{16}{2n^2})}{3\,(1 + \frac{17}{3n})} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1+0+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Tento příklad ukazuje obvyklý postup: uvědomíme si pokusem o dosazení, že máme neurčitý výraz ∞/∞, reformulujeme vzorec tak, aby šlo těmi částmi vzorce, které v čitateli a jmenovateli způsobují ∞, pokrátit a nakonec použijeme rozšířené dosazovací pravidlo. Ten první pokus o dosazení musíme udělat už s nějakou předchozí zkušeností počítání limit, protože v čitateli máme neurčitý výraz $\infty-\infty$, který se překoná způsobem $\lim_{n\to\infty} 2n^2 - 5n = \lim_{n\to\infty} n(2n-5) = \infty\cdot(\infty-5) = \infty\cdot\infty = \infty$. To ilustruje další věc: lépe se nám počítají limity, máme-li už nějakou předchozí zkušenost. Z výsledku tohoto příkladu pak můžeme zaznamenat další zkušenost pro budoucí použití: počítáme-li limitu podílu polynomů pro $x\to\infty$, pak při rovnosti jejich stupňů vychází výsledek jako podíl koeficientů u nejvyšších stupňů. Pokud by ale čitatel měl menší stupeň než jmenovatel, byla by pak limita rovna nule a když má čitatel větší stupeň než jmenovatel, pak je výsledkem ∞ nebo $-\infty$ v závislosti na znaménku koeficientu u nejvyšší mocniny. Až budeme příště počítat limitu podílu dvou polynomů, už to budeme vědět a máme výsledek rovnou (který pak můžeme uplatnit při použití rozšířeného dosazovacího pravidla v nějakém třeba složitějším vzorci).

Příklad 7.6 různě rychlý růst některých funkcí v nekonečnu. Všechny funkce $\ln x$, x^a, q^x a x^x (pro $a > 0, q > 1$) mají limitu v nekonečnu rovnou nekonečnu. Dáme je nyní do podílu a budeme zkoumat limity těchto podílů. Máme tedy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a máme spočítat $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$. Můžeme si to intuitivně představit tak, že ty dvě funkce soutěží, která se rychleji dostane do nekonečna. Pokud čitatel, máme výsledek ∞, pokud jmenovatel, máme výsledek 0. Pokud jsou si na tom rámcově stejně, máme výsledek konečný a pokud jsou si na tom skoro stejně, je výsledek roven jedné.

V příkladě 7.5 jsme si uvědomili, jak to dopadne, když takto spolu soutěží dva polynomy. Podobně to dopadne i pro případ $\lim_{x\to\infty} x^a/x^b$. Je-li $a < b$, pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x\to\infty} x^{a-b} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{b-a}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Tuto skutečnost budu zapisovat takto: pro $x \to \infty$ a $a < b$ je $x^a \ll x^b$. Dále je pro $1 < p < q$ je:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p^x}{q^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^x = 0, \quad \text{(viz též příklad 7.4)},$$

takže máme $p^x \ll q^x$. Dále pro $a > 0$ a $q > 0$ spočítáme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{p^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hosp.}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{a\,x^{a-1}}{(\ln p)\,p^x} = [\text{L'Hosp.}] = \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)\,x^{a-2}}{(\ln p)^2\,p^x} = \dots$$

Vidíme, že opakovaným použitím L'Hospitalova pravidla postupně snižujeme mocninu v čitateli až se stane, že ta mocnina bude nulová nebo záporná. V ten okamžik shledáme, že zkoumaná limita má hodnotu 0, takže je $x^a \ll p^x$. Dále je $\lim_{x\to\infty} p^x/x^x = 0$, protože stačí zvolit nějaké $q > p$ a máme $p^x < q^x < x^x$ pro $x > q$. Konečně pro $a > 0$ je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \left[\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hosp.}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1/a}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

takže $\ln x \ll x^a$. Toto intuitivně říká, že logaritmus leze do nekonečna jak šnek. A přitom je to pozoruhodný výsledek, protože když si nakreslíte graf funkce $\ln x$ a současně třeba graf funkce $\sqrt[100]{x} = x^{1/100}$, můžete nesprávně nabýt dojmu, že logaritmus v nekonečnu bude rychlejší. Zdání klame.

Výsledky naší soutěže funkcí při $x \to \infty$ můžeme shrnout takto:

$$\ln x \ll x^a \ll x^b \ll p^x \ll q^x \ll x^x \quad \text{pro libovolné } 0 < a < b \text{ a libovolné } 1 < p < q.$$

Příklad 7.7. Spočítáme $\lim_{n\to\infty}(1 + z/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$. Je to sice limita posloupnosti, ale můžeme zkusit spočítat limitu pro $x \to \infty$ funkce $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dané vzorcem $f(x) = (1+z/x)^x$. Ta má pro $x \in \mathbb{N}$ stejné hodnoty, jako zkoumaná posloupnost, takže podle Heineho věty, když bude existovat $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pak bude rovna i limitě zadané posloupnosti.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\,\ln(1+\frac{z}{x})} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\,\ln\left(1 + \frac{z}{x}\right)\right),$$

$$\lim_{x\to\infty} x\,\ln\left(1 + \frac{z}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{z}{x})}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}, \text{L'Hosp.}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{z}{x}}\, z(-x)^{-2} \frac{1}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{z}{1+\frac{z}{x}} = z.$$

Takže ze spojitosti funkce exp plyne výsledek $\lim_{x\to\infty}(1 + z/x)^x = e^z$.

Tento příklad ukazuje, že pokud máme ve vzorečku, ze kterého počítáme limitu, mocninu s nekonstantním základem i exponentem, je nutné mocninu přeformulovat pomocí (3) a dále počítat limitu exponentu. Přímé dosazení by v tomto příkladě vedlo na výraz 1^∞ a ten společně s výrazy $(0^+)^0$ a ∞^0 nedává žádný zaručený výsledek. Mohli bychom je zařadit mezi neurčité výrazy, ale tam většinou najdete jen výrazy s operacemi $+ - \cdot /$, protože jsou uváděny v souvislosti s větou o limitě $+ - \cdot /$.

Přímé dosazení do mocniny je možné, pokud je základ nebo exponent konstantní. Z příkladu 7.4 víme, že $q^\infty = 0$ pro $q \in (0, 1)$ a podobně se dá ukázat, že $q^\infty = \infty$ pro $q > 1$. Takové vzorce je možné zařadit do rozšířených dosazovacích pravidel. Také platí pro konstantní $c \in \mathbb{R}$, že $\lim_{x\to a} x^c = (\lim_{x\to a} x)^c$, protože funkce x^c je spojitá. Navíc pro $c > 0$ je $\infty^c = \infty$ a pro $c < 0$ je $\infty^c = 0$. Pro sudá nebo lichá c je možné vzorečky doplnit ještě o případy $(-\infty)^c$. Ale příklad 7.7 se tato počítat nedá, protože má nekonstantní základ i exponent. Dosazení do $1^\infty = 1$ vede k chybnému výsledku.

Příklad 7.8. Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ krát}} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1}{n} = 1.$$

Tento příklad vypadá dost naivně, ale byl sem zařazen proto, abychom si uvědomili, že použití rozšířeného dosazovacího pravidla v neomezeném množství instancí vzorce není možné. Konkrétně, v tomto příkladě by mohlo někoho napadnout jej řešit jako $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, ovšem to by bylo použito nekonečněkrát dosazení $1/\infty = 0$ a to je zapovězeno. Intuitivně bychom mohli o tomto příkladě hovořit jako o nekonečném součtu nekonečně malých veličin, tedy $\infty \cdot 0$, což je neurčitý výraz. Rozšířené dosazovací pravidlo je možné použít jen na konečně místech ve vzorci.

8 Zásadní výsledek: kalkulus pro derivace

Metoda derivování funkcí daných vzorcem tak, že se vzorec převede na obecně jiný vzorec podle pevně stanovených pravidel, se nazývá kalkulus. Například k funkci x^3 najdeme její derivaci $3x^2$ protože použijeme pravidlo kalkulu $(x^n)' = nx^{n-1}$. V této sekci si ukážeme, na jakých základech kalkulus stojí a jak souvisí s definicí derivace. Je to jeden z nejdůležitějších a jistě úžasných výsledků matematické analýzy.

Definice derivace. Motivací k zavedení pojmu derivace je například fyzikální popis rychlosti, známe-li v každém okamžiku x ujetou dráhu $d(x)$. Můžeme zjistit průměrnou rychlost v časovém intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ dělením ujeté dráhy časem tedy $(d(x_1) - d(x_0))/(x_1 - x_0)$. Pokud by nás zajímala okamžitá rychlost v bodě x_0, můžeme postupně zkracovat interval $\langle x_0, x_1\rangle$ a tím uvedený podíl spěje k dělení malého čísla malým číslem. Ale dokud nepošleme bod x_1 k bodu x_0 „nekonečně blízko“, budeme mít stále jen průměrné rychlosti, i když ty budou dobře aproximovat okamžitou rychlost, pokud volíme dostatečně malou velikost intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$. Kdybychom prohlásili $x_1 = x_0$, dostaneme dělení nulou, ale když spočítáme limitu toho podílu pro $x_1 \to x_0$, máme požadovaný přesný výsledek. Limitě takového podílu, která typicky vede na neurčitý výraz $0/0$, říkáme derivace. Přesněji tedy derivace funkce f v bodě a je

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{h}. \tag{9}$$

Derivace v bodě a je „lokální přírůstek“ funkce v bodě a, zatímco $(f(x) - f(a))/(x-a)$ je celkový přírůstek na intervalu $\langle a, x\rangle$.

Derivace funkce f v bodě a je číslo. Dále definujeme funkci $f'\colon D \to \mathbb{R}$, kde D je množina všech čísel $a \in \mathbb{R}$, pro která limita (9) existuje a je konečná. Hodnotu f' v bodě a definujeme jako derivaci f v bodě a. Proměnnou pro tuto funkci f' často značíme x a ne a, takže máme:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h}.$$

Funkci f' nazýváme derivací funkce f.

Kalkulus. Ukazuje se, že pokud je f dána vzorcem, pak umíme sestavit vzorec pro f' pomocí jistých pravidel, kterým říkáme kalkulus. Není tedy nutné limitu (9) počítat, navíc opakovaně pro každý bod a. Stačí použít hodnotu vzorce f' v bodě a získanou z kalkulu. Pravidla pro kalkulus jsou odvozena tak, že je limita (9) spočítána obecně. Například, nechť $f(x) = x^3$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

Máme tedy první vzorec do sbírky vzorců (kalkulu) pro sestavení derivace, sice $(x^3)' = 3x^2$. Tento příklad je příliš konkrétní, dá se ukázat $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro libovolné $n \in \mathbb{R}$, viz odstavec „derivace mocniny“ v sekci 4.

Kalkulus pro derivace se dá použít na funkci danou jakýmkoli vzorcem, protože se z definice derivace dá snadno dokázat věta o derivaci čtyř základních operací:

$$\big(f(x)+f(y)\big)' = f'(x)+g'(x), \qquad \big(f(x)-f(y)\big)' = f'(x)-g'(x),$$
$$\big(f(x)\,f(y)\big)' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x), \qquad \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

a dále je $(x)'=1$, $(c)'=0$, $(cf(x))'=cf'(x)$. Také se dá pro každou elementární funkci odvodit vzoreček pro derivaci (udělali jsme to v sekcích 3 až 5) a platí věta o derivaci složené funkce:

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\,g'(x).$$

Správné použití kalkulu pak trénují studenti na mnoha příkladech, kdy mají zadaný vzoreček a mají jej přetavit na nový vzoreček pro derivaci. Během tohoto tréningu si uvědomí, že nejde jen o to použít kalkulus, ale také výsledný vzoreček je třeba kultivovat do prezentabilní formy, tj. využít další vlastnosti funkcí, které se ve vzorečcích vyskytují. Pokud student neumí zderivovat jakýkoli vzoreček, postrádá základní schopnost každého uživatele matematické analýzy a pochopitelně pak musí zkoušku opakovat.

Příklad 8.1. Zderivujeme funkci

$$f(x)=\Big(\frac{x\sin\sqrt{x}}{\cos(2x+1)}\Big)^3.$$

Nejprve použijeme kalkulus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(\frac{x\sin\sqrt{x}}{\cos(2x+1)}\right)^2 \frac{(x\sin\sqrt{x})'\cos(2x+1)-x\sin\sqrt{x}\ (\cos(2x+1))'}{\cos^2(2x+1)} = \\ &= 3\left(\frac{x\sin\sqrt{x}}{\cos(2x+1)}\right)^2 \frac{(\sin\sqrt{x}+x\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}})\cos(2x+1)-x\sin\sqrt{x}\,(-\sin(2x+1))\cdot 2}{\cos^2(2x+1)} \end{aligned}$$

a následně je vhodné vzorec kultivovat:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2\sin^2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}}{\cos^3(2x+1)}+6x^3\sin^3\sqrt{x}\,\frac{\sin(2x+1)}{\cos^4(2x+1)}.$$

Definiční obor derivace. Ze vzorce (9) plyne, že definiční obor funkce f' je vždy podmnožinou definičního oboru f. Pokud je f dána jediným vzorcem, pak její derivace má stejný definiční obor s případnou výjimkou izolovaných bodů. Například $\sqrt[3]{x}$ je definovaná v bodě 0, ale $(\sqrt[3]{x})' = 1/(3\sqrt[2]{x^2})$ v nule definovaná není. Limita (9) tam je rovna $+\infty$. Ovšem do definičního oboru funkce f' zahrnujeme jen konečné hodnoty, třebaže funkce f může mít v bodě a i derivaci ∞ nebo $-\infty$. Definice (9) takové hodnoty to připouští.

Má-li funkce v bodě $a\in\mathbb{R}$ konečnou derivaci, je tam spojitá, protože

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))\,\frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a}(x-a)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0\cdot f'(a) = 0,$$

takže $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ a f je v bodě a spojitá. Obráceně řečeno, jakmile funkce není v nějakém bodě spojitá, nemůže tam mít konečnou derivaci.

Je-li f dána více vzorci, pak na rozhraních těchto vzorců můžeme počítat jednostranné derivace, tedy jednostranné limity (9). To lze v případě spojité funkce jednoduše provést dosazením do odpovídajících vzorců pro derivaci sestavených podle kalkulu. Pokud se tyto jednostranné limity liší, funkce v daném bodě nemá derivaci. Typickým příkladem je $f(x)=|x|$, která je dána dvěma vzorci:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x\ge 0\\ -x & \text{pro } x<0\end{cases} \qquad (|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{pro } x> 0\\ -1 & \text{pro } x<0\end{cases}$$

V bodě 0 má $(|x|)'$ jednostranné derivace -1 zleva, 1 zprava, takže v bodě 0 derivace neexistuje. Funkce $|x|$ je všude spojitá ale v jednom bodě nemá derivaci. Na jejím grafu se takové místo projeví „hrotem“, tedy neexistuje tam tečna ke grafu funkce. Toto je typické chování spojitých funkcí bez derivace v izolovaném bodě: takové funkce jsou dány více vzorečky, které na sebe v bodech, kde jeden vzorec přechází na jiný vzorec, navazují (mají tam stejné funkční hodnoty), takže funkce je tam spojitá. Ale nenavazují tam derivace těchto vzorců.

Příklad 8.2. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána dvěma vzorci $f(x) = 2x$ pro $x < 3$ a $f(x) = 2x + 1$ pro $x \geq 3$. V bodě 3 není spojitá, takže tam nemůže mít konečnou derivaci. Spočítáme-li limitu (9) zprava, dostaneme hodnotu 2 zatímco stejná limita zleva dává $\lim_{x \to 3^-}(2x - 7)/(x - 3) = -1/0^- = \infty$. Takže derivace v bodě 3 neexistuje. Kdybychom ale pozměnili funkci tak, že v bodě 3 ji předepíšeme funkční hodnotu 6,5, pak bude limita (9) zleva i zprava rovna ∞ a tato funkce má derivaci na celém $\mathbb{R}$, ovšem v bodě 3 má derivaci ∞.

Věta o přírůstku funkce. Má-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci (s výjimkou případně krajních bodů intervalu, kde ovšem musí být spojitá), pak existuje c uvnitř tohoto intervalu tak, že $f'(c)$ je rovno směrnici sečny grafu funkce f procházející body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. To znamená, že v bodu $[c, f(c)]$ je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se zmíněnou sečnou. Důkaz této věty se obvykle dělá ve dvou krocích. Nejprve se dokáže tzv. věta Rollova, kde navíc je $f(a) = f(b)$ a dokazuje se, že pak $f'(c) = 0$. Bod c se najde v maximu resp. minimu funkce f, která díky své spojitosti toto maximum či minimum má. Tvrzení $f'(c) = 0$ se pak přímo ověří z definice derivace. Ve druhém kroku se od f odečte rovnice sečny a tím získáme funkci g splňující předpoklady Rollovy věty. Bod c nalezený podle Rollovy věty pro funkci g pak splňuje tvrzení věty o přírůstku funkce pro f.

Tato věta je základem při argumentaci, proč platí vlastnosti o vztahu monotonie funkce a znaménku její derivace a užije se při důkazu Taylorovy věty a také Newton-Leibnizovy věty umožňující výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce.

Aplikace kalkulu. Mezi obvyklé aplikace kalkulu patří zjišťování extrémů funkcí, vyšetřování průběhu funkcí a sestavování Taylorova polynomu.

Extrémy funkcí. Má-li funkce v bodě a derivaci, lze sestrojit ke grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$ tečnu, která je určena vzorcem $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$. Ke zdůvodnění toho se obvykle kreslí obrázek, ve kterém sečny postupně přecházejí v tečnu při zmenšování vzdálenosti bodu x od bodu a a to přesně odpovídá limitě (9). Pořádné zdůvodnění se pak opírá o větu o přírůstku funkce. Není-li tato tečna rovnoběžná s osu x, funkce f tam nemůže mít extrém (je tam lokálně rostoucí nebo lokálně klesající). Takže má-li funkce f v bodě a derivaci, pak tam může mít extrém jen při vodorovné tečně, tedy při $f'(a) = 0$. Z toho plyne postup pro hledání lokálních extrémů funkce f:

Lokální extrémy funkce f mohou být

a) v krajních bodech definičního oboru (pokud tam je funkce f definovaná),
b) v bodech, kde f nemá derivaci a
c) v bodech, kde $f' = 0$.

Těm posledně zmíněným bodům říkáme „stacionární body“ funkce f a najdeme je tak, že použijeme kalkulus k sestavení vzorců pro funkci f' a vyřešíme rovnici $f'(x) = 0$. Stacionární body mohou být lokálním minimem funkce (jako x^2 v nule), lokálním maximem funkce (jako $-x^2$ v nule), nebo tam extrém nemusí být (jako x^3 v nule). Takže stacionární body považujeme jen za body podezřelé z extrému a je potřeba je dále prozkoumat podrobněji. To můžeme udělat pomocí druhé derivace f'', takže ještě jednou použijeme kalkulus. Je-li $f'' > 0$, funkce je konvexní (jako x^2) a f má tedy ve stacionárním bodě minimum. Je-li $f'' < 0$, funkce je konkávní (jako $-x^2$) a f má ve stacionárním bodě maximum. Je-li ve stacionárním bodě $f''(a) = 0$, pak jsme se zatím mnoho nedozvěděli, protože funkce tam nemusí mít extrém (jako x^3 v nule) nebo tam může mít minimum (jako x^4 v nule) nebo tam může mít maximum (jak $-x^4$ v nule). V takovém případě je třeba o charakteru stacionárního bodu rozhodnout jinak, např. z průběhu funkce, z její spojitosti a limit či funkčních hodnot v dalších bodech, z dalších derivací atd.

Průběhy funkcí. Z věty o přírůstku funkce plyne, že je-li f' na nějakém intervalu kladná, je na něm f rostoucí, je-li f' na intervalu záporná, je na něm f klesající. Dále platí, že je-li f'' na nějakém intervalu kladná, je na něm f konvexní a je-li f'' na intervalu záporná, je na něm konkávní. Tyto vlastnosti dávají možnost vyšetřit průběh funkce pomocí kalkulu: najdeme f' a f'' a z jejich znamének získáme představu o průběhu funkce. S tím souvisejí úlohy kdy je dána funkce f vzorcem a má se najít její průběh. Je dobré si uvědomit, že znaménko první a druhé derivace může být jen doplňujícím vodítkem při vyšetřování průběhu funkce. Doporučuji totiž postupovat takto:

1. Najdeme definiční obor zadané funkce f (pokud není dán).
2. Vyšetříme limity f v krajních bodech definiřčního oboru (pokud tam f není definována).

3. Pomocí kalkulu najdeme f'.
4. Najdeme stacionární body (tj. řešíme $f' = 0$) a všechny případné další body podezřelé na extrém (tj. kde f nemá derivaci a krajní body definičního oboru, je-li tam f definována).
5. Najdeme funkční hodnoty v bodech zmíněných výše a vyneseme je do grafu. U stacionárních bodů lze krátkou vodorovnou čárkou vyznačit směr průběhu grafu procházejícího stacionárním bodem.
6. V tuto chvíli už typicky můžeme načrtnout graf funkce f podle vynesených bodů a z limit v krajních bodech definičního oboru.
7. Ověříme podle znaménka f', že nakreslený graf je v pořádku, tj. funkce roste na intervalech, kde $f' > 0$ a klesá na intervalech, kde $f' < 0$. Pokud to takto nevychází, je někde chyba ve výpočtu.
8. V případě potřeby najdeme inflexní body, tj. body, kde se konvexní průběh mění na konkávní nebo naopak. To provedeme vyřešením $f''(x) = 0$. Tyto body také vyneseme do grafu.
9. Úseky, kde je funkce konvexní nebo konkávní, typicky vyplynou už při kresbě grafu v bodě 6 a z poloh inflexních bodů. Pomocí znaménka f'' můžeme ověřit, že není nikde chyba ve výpočtu.

Příklad 8.3. Je dána funkce f s definičním oborem $D = (0, \infty)$. Ví se o ní, že je $\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f = 0$. Neprozradíme její vzorec, jen to, že má na celém definičním oboru konečnou derivaci a pouze pro $x = 1$ je $f'(x) = 0$ (tj. má jediný stacionární bod) a platí $f(1) = 3$. Co z toho můžeme soudit o jejím průběhu?

Protože má f derivaci, je spojitá na D. Kvůli limitě v nule musí být na okolí nuly zprava rostoucí. Kvůli jedinému stacionárnímu bodu a existenci derivace všude nemůže mít extrém jinde než v bodě 1. Funkce musí být na intervalu $(0, 1)$ rostoucí, protože kdyby měla změnit růst na klesání v tomto intervalu, musela by mít další stacionární bod a to ona nemá. Kvůli hodnotě $f(1) = 3$ a $\lim_{x\to\infty} = 0$ musí být f na intervalu $(1, \infty)$ klesající, nemůže měnit tento svůj trend, protože na intervalu $(1, \infty)$ nemá další stacionární bod. V bodě $x = 1$ je tedy lokální i globální maximum. K ose x se graf funkce pro $x \to \infty$ přimyká shora a to jinak nejde než konvexním způsobem. Jinak ten graf k ose x totiž „nepřihnete“. Takže na okolí ∞ musí být f konvexní. Podobnou úvahou shledáme že na okolí bodu 1 musí být konkávní a také na okolí 0^+ musí být konkávní, jinak se graf k ose y nemůže přibližovat. Očekáváme tedy aspoň jeden inflexní bod na intervalu $(1, \infty)$. Ten bychom mohli zjistit pomocí $f'' = 0$, pokud bychom znali vzorec pro funkci f.

Příklad ukazuje, že ačkoli se studenti většinou učí používat znaménko derivace k rozhodnutí o typu monotonie funkce jako primární nástroj při vyšetřování průběhu funkcí, můžeme na to jít jinak a využít to jen jako doplňkový nástroj, protože z limit v krajních bodech definičního oboru a z poloh singulárních bodů už víme dost. Ovšem, singulární body nelze najít jinak než řešením rovnice $f' = 0$, takže kalkulus je při vyšetřování průběhu funkcí samozřejmě potřeba použít.

Asymptoty grafu. Asymptoty jsou přímky, ke kterým se graf funkce „blíží“, když opouští náš náčrtek, protože nemůžeme mít nekonečně velký náčrtek. Ne vždy v takové situaci existuje asymptota, ale často se to stává. Konkrétněji, asymptoty mohou být v konečných bodech $x \to a \in \mathbb{R}$, pokud tam limita zprava nebo zleva funkce f je ∞ nebo $-\infty$. To jsou svislé asymptoty. Dále mohou existovat asymptoty pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$. Má-li tam f konečnou limitu, je tam vodorovná asymptota. Jinak tam může být šikmá asymptota, pokud $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = A$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - Ax = B$ jsou konečné limity. Pak je šikmou asymptotou přímka daná vzorcem $y = Ax + B$. Při vyšetřování průběhu funkcí je rozumné se věnovat i asymptotám a uvědomit si, z které strany se graf funkce k asymptotě blíží. V předchozím příkladě má funkce f svislou asymptotu osu y (graf se k ní blíží zprava) a dále má vodorovnou asymptotu osu x (graf se k ní blíží shora).

Taylorův polynom. Je dána funkce f, která má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace až do řádu n. Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n značím $T_{n,f,a}$ a je to funkce $T_{n,f,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je dána vzorcem:

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (10)$$

Pro jakoukoli funkci f s uvedenými vlastnostmi, bod $a \in \mathbb{R}$ a řád $n \in \mathbb{N}$ umíme podle tohoto vzorce sestavit Taylorův polynom. K získání konstant v čitatelích zlomků použijeme opakovaně kalkulus na vzorec, kterým je dána funkce f, a do výsledných vzorců dosadíme bod a. Vidíme, že výsledná funkce $T_{n,f,a}$ je polynom: sledujte proměnnou x ve vzorci, která tam vystupuje pouze v různých mocninách a je násobena konstantami. Tento polynom má stupeň nejvýše n. Jeho stupeň je přesně roven řádu n, pokud $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Snadno lze ověřit, že v bodě a se Taylorův polynom přímo rovná $f(a)$, ale nejen to. Derivace tohoto polynomu v bodě a až do řádu n se rovnají odpovídajícím derivacím funkce f v bodě a. Stručně řečeno:

$$T_{n,f,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \text{ pro všechna } k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Toto je jediný polynom stupně nevýše n s touto vlastností, protože každý polynom stupně nevýše n je jednoznačně určen svou hodnotou a hodnotami všech svých derivací až do řádu n ve vybraném bodě $a \in \mathbb{R}$.

Výše uvedenou vlastnost popíšeme nyní z geometrického pohledu. Označme $A = [a, f(a)]$. Grafem Taylorova polynomu funkce f v bodě a prvního řádu je tečna ke grafu funkce f v bodě A. Tedy prochází bodem A a má shodný směr s grafem funkce f v bodě A. Taylorův polynom druhého řádu je parabola, která prochází bodem A, má stejný směr v bodě A a stejné zakřivení v bodě A jako graf funkce f. Zakřivení je dáno druhou derivací. Taylorův polynom třetího řádu je kubická parabola, která prochází bodem A, má stejný směr, stejné zakřivení a stejnou změnu zakřivení v bodě A jako graf funkce f. Změnu zakřivení měříme třetí derivací. Atd. Intuitivně tedy můžeme říci, že Taylorův polynom řádu n aproximuje v okolí bodu a funkci f. A na množině všech polynomů stupně nejvýše n není žádný, který by funkci f v bodě a aproximoval lépe.

Elementární funkce, se kterými se v matematické analýze pracuje (viz sekce 3 až 5) neumíme vyhodnotit v obecném bodě pomocí konečně mnoha sčítání, odčítání, násobení, dělení. Například hodnotu $\sin 1$ nezjistíte konečně mnoha operacemi $+, -, \cdot, /$. Nabízí se tedy možnost nahradit hodnotu funkce f hodnotou Taylorova polynomu, k čemuž stačí konečně mnoho operací $+, -, \cdot, /$, samozřejmě za předpokladu, že všechny konstanty potřebné pro sestavení Taylorova polynomu známe. K tomu stačí volit bod a tak, abychom opravdu tyto konstanty dokázali vyčíslit. Například pro funkci sin volíme bod $a = 0$. V tomto bodě známe hodnotu sin i hodnoty všech jeho derivací: $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$, atd., takže můžeme sestavit třeba Taylorův polynom sedmého řádu funkce sin:

$$T_{7,\sin,0}(x) = \frac{1}{1}\,x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7$$

a používat $T_{7,\sin,0}(x)$ místo $\sin(x)$. Dojdeme k výsledku po konečně mnoha operacích. Otázka je, jaké se dopustíme chyby při takové aproximaci. Tomu se věnuje následující text.

Odchylku hodnoty Taylorova polynomu při jeho použití místo vyhodnocení funkce f samotné v bodě x značíme $R_n(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$ a říkáme jí zbytek. Taylorova věta říká, jak takový zbytek vypadá: Má-li f na nějakém okolí U bodu a konečné derivace až do řádu $n+1$ a $x \in U$, pak existuje ξ mezi body a a x takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Pochopitelně, vyčíslit konečně mnoha operacemi tento zbytek nepůjde, protože to bychom uměli konečně mnoha operacemi vyhodnotit zcela přesně i funkce aproximované Taylorovým polynomem a o tom si můžeme nechat jenom zdát. Například o bodu ξ pouze víme, že $\xi \in (x, a)$ pro $x < a$ a $\xi \in (a, x)$ pro $x > a$, ale kde přesně se ten bod nachází, to Taylorova věta neříká. Chybu při aproximaci funkce Taylorovým polynomem $|R_n(x)|$ tedy můžeme jen odhadnout nějakou mezí z vlastností funkcí vyskytujících se ve vzorci pro $R_n(x)$.

Příklad 8.4. Odhadneme chybu aproximace funkce sin polynomem $T_{7,\sin,0}(x)$ za předpokladu, že vždy bude $|x| < 1{,}6$. Víme, že osmá derivace $\sin x$ je $\sin x$, takže

$$|R_7(x)| = \left|\frac{\sin\xi}{8!}\right| |x|^8 < \left|\frac{1}{8!}\right| 1{,}6^8 \doteq 0{,}001065$$

máme tedy zaručenu přesnost na dvě desetinná místa. Dále lze využít toho, že $T_{7,\sin,0}(x) = T_{8,\sin,0}(x)$, protože se tyto dva polynomy liší jen o nulový sčítanec. Odhad pro $T_{8,\sin,0}(x)$ dává sebevědomější výsledek: $|R_8(x)| < |\cos\xi/9!|\,1{,}6^9 = 0{,}000189$, takže si dovolíme tvrdit, že budeme mít i při použití polynomu $T_{7,\sin,0}$ přesnost na tři desetinná místa. Pokud by někdo chtěl vypočítat $\sin x$ pro $|x| \geq 1{,}6$, pak nejprve posuneme argument o násobky 2π blíže k nule, pak využijeme symetrie grafu funkce sin podél os $x = 0$, $x = \pi$ a $x = \pi/2$, takže nakonec stačí zjistit hodnotu funkce sin pro $x \in \langle \pi/2/\pi/2 \rangle$. A to odpovídá požadavku $|x| < 1{,}6$. To tedy dokážeme vypočítat pomocí polynomu $T_{7,\sin,0}$ s přesností na tři desetinná místa.

Pokud bychom sestavili analogický polynom $T_{8,\cos,0}$ a používali jej na výpočet hodnot funkce cos, pak můžeme díky dalším symetriím a posunům grafů funkcí sin a cos převést výpočet požadované hodnoty na hledání hodnoty jedné z funkcí sin, cos pro $|x| < \pi/4$, což pak vede ještě k lepšímu odhadu

$$|R_8(x)| = \left|\frac{\cos\xi}{9!}\right| |x|^9 \leq \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 \doteq 0{,}000000313.$$

Takže jsme schopni pomocí polynomů $T_{7,\sin,0}$ a $T_{8,\cos,0}$ počítat hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ s přesností na 6 desetinných míst.

Příklad 8.5. Chceme zkonstruovat kalkulačku, která na displeji zobrazuje čísla na 10 desetinných míst a měla by umět mimo jiné vyhodnocovat funkce $\sin x$ a $\cos x$ v libovolném bodě. Taylorovy polynomy jakého řádu máme pro tyto funkce použít?

Z předchozího příkladu víme, že lze argument funkcí sin, cos posunout tak, že stačí vyhodnocovat $\sin x$ a $\cos x$ jen pro $|x| \leq \pi/4$. Hledáme tedy řád n tak, aby

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \leq 10^{-10}.$$

Po krátkém experimentování shledáme, že nerovnost platí pro $n = 12$ a větší. Do kalkulačky tedy zadrátujeme Taylorovy polynomy $T_{11,\sin,0}$ a $T_{12,\cos,0}$.

9 Primitivní funkce, neurčitý integrál

9.1 Definice, vlastnosti

Primitivní funkce k dané funkci f na intervalu (a,b) je taková funkce, jejíž derivace je rovna f na zadaném intervalu. Není-li v kontextu primitivní funkce zmíněn interval, máme na mysli celý definiční obor funkce f. Skládá-li se tento definiční obor z více disjunktních intervalů, pak na každém z nich definujeme primitivní funkci zvlášť.

První pozorování: protože funkce mající derivaci je spojitá, je primitivní funkce vždy spojitá.

Postačující podmínka existence primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) je spojitost f na tomto intervalu. Důkaz se opírá o určitý integrál (o němž budeme mluvit až v následující sekci). Dá se totiž dokázat, že když definujeme $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, pak za podmínky spojitosti f je $F' = f$, takže F je primitivní funkce k funkci f.

Nutná podmínka existence primitivní funkce F k funkci f na intervalu (a,b) je vlastnost mezihodnoty[1] funkce f na tomto intervalu, která zní: pro každé $u, v \in (a,b)$ a pro každé číslo C mezi $f(u)$ a $f(v)$ existuje c mezi u a v takové, že $f(c) = C$. Důkaz nutnosti této podmínky se opírá o fakt, že funkce $G(x) = F(x) - Cx$ je spojitá, protože F je spojitá. Dále předpokládejme $u < v$ a $f(u) < C < f(v)$. Pak je G lokálně klesající v bodě u, protože $G'(u) = f(u) - C < 0$ a z obdobných důvodů je G lokálně rostoucí v bodě v. Spojitá funkce G má tedy na intervalu (u,v) své minimum v bodě c a v něm je $G'(c) = f(c) - C = 0$, tedy $f(c) = C$.

Příklad 9.1. Funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbb{R}$ vlastnost mezihodnoty, takže nemůže mít na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Ovšem zvlášť na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je tato funkce spojitá a má tedy na těchto intervalech primitivní funkci. Na prvním jmenovaném intervalu je primitivní funkce třeba $F(x) = -x$ a na druhém třeba $F(x) = x + 42$.

Je-li F primitivní funkce k f a dále $G = F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta, pak je i G primitivní funkce k f, protože $G' = (F+c)' = F' = f$. Také platí, že každé dvě primitivní funkce ke společné funkci f se liší nejvýše o konstantu, protože $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ a je známo, že pouze konstanta má vlastnost, že její derivace je nulová funkce.

Soubor všech primitivních funkcí k dané funkci f na intervalu (a,b) se dá tedy vyjádřit jako jediná primitivní funkce F a k ní pak přidáme do tohoto souboru všechny funkce tvaru $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Symbolem $\int f$ rozumíme soubor všech primitivních funkcí k f a nazýváme jej *neurčitý integrál z f*. Pokud se definiční obor funkce f skládá z více disjunktních intervalů, pak na každém z nich je možné stanovit soubor primitivních funkcí nezávisle na ostatních intervalech. Tím chci říci, že když zapíšeme soubor primitivních funkcí ve tvaru $F + c$, tato konstanta c se stanoví pro každý interval zvlášť, takže zápis $F + c$ může být v takovém případě trochu matoucí.

Příklad 9.2. Všechny primitivní funkce k funkci $1/x$ jsou funkce $\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Ovšem tyto soubory funkcí stanovujeme zvlášť pro primitivní funkce na intervalu $(-\infty, 0)$ a zvlášť pro primitivní funkce na intervalu $(0, \infty)$. O „společné primitivní funkci“ na celém definičním oboru funkce $1/x$ nikdy nehovoříme.

Integrováním typicky rozumíme hledání vzorečku primitivní funkce F k dané funkci f, jež je také daná vzorečkem. Najdeme-li takový vzoreček, pak obvykle píšeme výsledek ve tvaru $\int f = F + c$ a čteme

[1] Darbouxova vlastnost.

jej, že integrál z f je F a dále zahrnuje i všechny funkce lišící se od F o konstantu. Tento zápis používáme i pro funkci f definovanou na více disjunktních intervalech, i když jsme si před chvílí řekli, že ten zápis je trošičku matoucí a měli bychom mít vždy na paměti, že stanovujeme soubor primitivních funkcí na každém intervalu zvlášť.

Je-li ve vzorečku pro f označena proměnná symbolem x (což je docela obvyklé), pak píšeme $\mathrm{d}x$ na konec výrazu uvozeného symbolem integrálu a tím dáváme najevo, podle které proměnné integrujeme. Tedy například $\int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$. Je sice pravda, že v analýze jedné proměnné bývá obvykle zřejmé, podle které proměnné integrujeme, ale toto Leibnizovo značení je docela užitečné a v případě určitého integrálu má navíc význam jakési „nekonečně malé veličiny“ při výpočtu plochy. O tom se zmíníme v následující sekci.

Proces integrování (tedy hledání vzorečku pro primitivní funkci, je-li dán vzoreček výchozí funkce) je opačný k procesu derivování. Kalkulus pro integrování se odvodí tak, že prohodíme sloupce „vstup“ a „výstup“ v tabulce kalkulu pro derivování a využijeme některé další zřejmé vlastnosti integrálu. Například platí linearita integrálu, konkrétně tedy:

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dále je možné při integrování použít větu o integraci per partes a větu o substituci (viz níže).

Příklad 9.3. V tabulce kalkulu pro derivování máme pro vstup $f(x) = x^n$ výstup $f'(x) = nx^{n-1}$. Když nyní převrátíme vstup s výstupem, máme v tabulce pro integrování pro $f(x) = nx^{n-1}$ výstup $F(x) = x^n$. To není příliš praktické, využijeme tedy linearity integrálu a do tabulky zapíšeme na vstup $f(x) = x^{n-1}$ a výstup $F(x) = x^n/n$. Ještě praktičtější je zaměnit symbol n za symbol $n+1$ a na vstupu mít $f(x) = x^n$ a na výstupu pak $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$. Tato identita platí pro všechna reálná $n \neq -1$. Obdobně jednoduchými úvahami vzniká celá tabulka kalkulu pro integrování...

Příklad 9.4. $\int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = x^3/3 + x^2/2 + c$. Ve výpočtu jsme využili linearity integrálu a dále v předchozím příkladě odvozený údaj z tabulky kalkulu pro integrování. Takto děsně jednoduché to ale ve většině případů není...

Kalkulus pro integrování (na rozdíl od kalkulu pro derivování) nám nedává možnost najít výslednou primitivní funkci ve formě vzorečku pro jakoukoli výchozí funkci zadanou vzorečkem. Je to tím, že nyní nemáme ve sloupci „vstup“ v tabulce kalkulu pro integrování předlohy pro všechny možnosti, jak může funkce daná vzorečkem vypadat. Třeba součin dvou funkcí se nedá rozepsat na integrování jednotlivých funkcí součinu. Existuje sice možnost integrování per partes, ale ta není univerzálním nástrojem jak integrovat součin jakýchkoli dvou funkcí.

Integrování je tedy daleko zábavnější a napínavější činnost než derivování, ne vždy se totiž dobereme k výsledku. Chce to získat praxi a schopnost vidět vzájemně propojené možnosti vět o integrování a tabulky kalkulu pro integrování. A v neposlední řadě je třeba používat různé vlastnosti vzorečků samotných. Naši matematičtí předkové popsali širokou škálu možností, jak integrovat za předpokladu, že integrovaný vzoreček vypadá určitým způsobem. Z těchto poznatků se dnes učíme jen nepatrnou část, abychom si uvědomili aspoň základní souvislosti problematiky integrování. Vždy budou existovat vzorečky, které se nikomu nikdy zintegrovat (tj. najít odpovídající vzoreček pro primitivní funkci) nepodařilo, například $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Funkce e^{-x^2} je spojitá a tedy k ní existuje primitivní funkce[2], ale vyjádřit tuto funkci vzorcem obsahujícím součet, rozdíl, součin, podíl konstant a proměnných a případně elementárních funkcí a případně všelijak složených funkcí z těchto funkcí nejde.

Máte-li v písemce za úkol integrovat nějakou funkci, je příklad určitě vybrán pečlivě tak, aby se primitivní funkce dala najít.

9.2 Základní postupy při integrování

Jak jsme již uvedli, používáme tabulku pro integrování ..., linearitu integrálu a dále následující věty.

Integrace per partes. umožní rozepsat integrál součinu funkcí takto:

$$\int f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } G \text{ je primitivní funkce k funkci } g.$$

[2] Ve statistice je označována errf.

Tvrzení se snadno odvodí ze vzorečku derivace součinu funkcí $(uv)' = u'v + uv'$, což je totéž jako $uv' = (uv)' - u'v$. V tomto vzorci položíme $f = u$ a $v' = g$ a integrujeme obě strany rovnosti.

Při výpočtu pomocí per partes se hodí mnemotechnická pomůcka, sice tabulka se dvěma sloupci a dvěma řádky, do níž si napíšeme:

$$\begin{vmatrix} u = \dots & v' = \dots \\ u' = \dots & v = \dots \end{vmatrix},$$

kde místo teček píšeme konkrétní vzorce. První řádek obsahuje vstupní funkce, jejichž součin chceme integrovat, druhý řádek pak obsahuje nově vypočtené funkce, první z nich derivujeme, druhou integrujeme. Výsledek po aplikaci per partes je roven součinu údajů na hlavní diagonále minus integrál součinu údajů z druhého řádku.

Je zřejmé, že integrace per partes nám při výpočtu integrálu pomůže jen tehdy, když umíme najít primitivní funkci k funkci g (což obnáší další proces integrování) a také musíme umět najít primitivní funkci k součinu $f'G$, což tedy vypadá, že jsme se pouze přesunuli z bláta do hodně špinavé louže. Existují ale „obvyklé" případy, kdy integrování per partes pomůže:

Příklad 9.5. Integrujeme součin fg, kde f je polynom a g je $\sin \alpha x$ nebo $\cos \alpha x$ nebo $e^{\alpha x}$. Polynom derivujeme a funkci g snadno integrujeme. Po aplikaci per partes dostáváme polynom o jedna nižího stupně a funkce g se přitom příliš nezměnila. Je-li polynom už stupně nultého (neboli konstanta), pak naposledy najdeme primitivní funki k funkci sin nebo cos nebo e^x a jsme hotovi. Jinak proces per partes opakujeme znovu opakovaně tak dlouho až stupeň polynomu klesne na nulu. Konkrétně třeba:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+3x)\,\sin 2x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = x^2+3x & v' = \sin 2x \\ u' = 2x+3 & v = -(\cos 2x)/2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{-(x^2+3x)\,\cos 2x}{2} - \int (2x+3)\,\frac{-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{-(x^2+3x)\,\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int (2x+3)\,\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = 2x+3 & v' = \cos 2x \\ u' = 2 & v = (\sin 2x)/2 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+3x)\,\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\,\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+3x)\,\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\,\sin 2x + \frac{1}{4}\,\cos 2x + c.
\end{aligned}$$

Příklad 9.6. Při integrování $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ se použije trik: položíme $g(x) = 1$ a provedeme per partes:

$$\begin{aligned}
&\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = 1/x & v = x \end{vmatrix} = x\,\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\,\ln x - x + c, \\
&\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & v' = 1 \\ u' = 1/(x^2+1) & v = x \end{vmatrix} = x\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.
\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili faktu $\int (f'/f) = \ln f$, což vyplývá ze substituce $y = f$.

Příklad 9.7. Někdy se může stát, že při použití per partes se dostaneme do kruhu, ale nemusí to být pravda:

$$\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \sin x & v' = \cos x \\ u' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Po převedení posledního integrálu přes rovnost na levou stranu máme $2\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + c_1$, což vede k výsledku $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = (\sin^2 x)/2 + c$. Poznamenávám, že tento integrál lze taky spočítat substitucí nebo jen tím, že si uvědomíme, jak dopadne derivování výrazu $\sin^2 x$.

Substituce. Existují dvě věty o substituci, jejich přesné znění si kdyžtak čtenář dohledá. My se zde zaměříme na praktické použití těch vět. Při substituci je třeba převést integrovaný vzorec v jedné proměnné na výraz v jiné proměnné. Vztah mezi původní proměnnou (dejme tomu x) a novou proměnnou (dejme tomu y) je možné stanovit dvěma způsoby: $\varphi(x) = y$ (substituce prvního druhu) a $x = \psi(y)$ (substituce druhého druhu). V případě substituce druhého druhu musí být funkce ψ prostá. Lidově řečeno, při substituci prvního druhu se díváme na kus vzorce v integrovaném výrazu a nahrazujeme ji proměnnou, při substituci druhého druhu se díváme na proměnnou a nahrazujeme ji vzorcem. V obou případech nelze provést jen záměnu proměnné v integrovaném výrazu samotném, ale také je třeba provést záměny symbolu $\mathrm{d}x$ za $\mathrm{d}y$ podle pravidla $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ pro první druh a $\mathrm{d}x = \psi'(y)\,\mathrm{d}y$ pro druhý druh. Tato pravidla si v obou případech pamatujeme tak, že v předpisu pro transformaci proměnné zderivujeme levou i pravou stranu rovnosti a připíšeme k levé straně značku $\mathrm{d}x$ a k pravé značku $\mathrm{d}y$. Po úspěšném nalezení primitivní funkce v nové proměnné je třeba ji zpětně převést na výraz v původní proměnné, což v případě prvního druhu jde snadno: nahradíme každý výskyt y výrazem $\varphi(x)$, zatímco v druhém případě je třeba použít inverzní funkci $y = \psi^{-1}(x)$.

Příklad 9.8. Se substitucí prvního druhu se setkáváme při integrování poměrně často. V tomto případě musíme integrovaný výraz vnímat jako součin $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ který se nahradí výrazem $g(y)\,\mathrm{d}y$. Což vyžaduje cvik a zkušenosti. Například

$$\int \frac{\ln x + \ln 2x + \ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln 2 + 2\ln x + \ln^2 x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \left| \begin{array}{c} \ln x = y \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right| = \int (\ln 2 + 2y + y^2)\,\mathrm{d}y =$$
$$= (\ln 2)\,y + y^2 + \frac{y^3}{3} + c = (\ln 2)\,\ln x + \ln^2 x + \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

Příklad 9.9. Se substitucí druhého druhu se setkáváme velmi výjimečně. Typický školní příklad na tento druh substituce obsahuje výraz $\sqrt{1-x^2}$, který se po nahrazení $x = \sin y$ zjednoduší: $\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{cos^2 y} = \cos y$. Navíc původní výraz byl definován jen na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, takže když volíme $y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, je na tomto intervalu substituční funkce $\sin y$ prostá a svými hodnotami pokrývá všechny přípustné hodnoty původní proměnné x. Což je potřebné si u substituce druhého druhu vždy uvědomit. Konkrétně třeba:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin y \\ \mathrm{d}x = \cos y\,\mathrm{d}y \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos y}\cos y\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}y = y + c = \arcsin x + c.$$

Tento příklad zde byl zařazen jen jako modelová ukázka použití substituce druhého druhu. Pochopitelně, kdybychom si vzpomněli, jak se derivuje funkce $\arcsin x$, tak máme výsledek ihned bez použití substituce.

10 Určitý integrál

Určitý integrál $\int_a^b f$ měří plochu mezi grafem funkce f a osou x v rozmezí mezi body a a b. Dodáme ještě, že je-li funkce v nějakém úseku záporná, započítá určitý integrál do celkového výsledku zápornou hodnotu plochy této části.

Abychom „uvěřili“ tomuto tvrzení, definuje se ve školách už po staletí určitý integrál podle Riemannovy definice[3]. Tato definice nejprve tu plochu odhadne pomocí součtu ploch obdélníčků (plochy obdélníčků umíme snadno spočítat), které v limitním přechodu mají nekonečně malou šířku a je jich pod grafem seskupeno nekonečně mnoho. Tato „práce s nekonečnem“ se provede matematicky přesně pomocí suprema a infima. Našim cílem je ale nezabředávat do zbytečných detailů (přesnou Riemannovu definici si čtenář jistě najde, kdy bude chtít), ale sledujme nyní hlavně celkový koncept, tedy proč to takto děláme. Na otázku, proč nestačí definovat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ mi bohužel dokáže odpovědět jen velmi málo studentů. Odpověď je přitom jednoduchá: z takové definice bychom nepoznali, že vlastně počítáme plochu pod grafem funkce.

Takže, jak vypadá základní koncept? Z Riemannovské definice určitého integrálu nám kvůli těm obdélníčkům vyplývá, že určitý integrál počítá plochu pod grafem funkce, jak bylo řečeno výše. Dále se z této definice odvodí základní vlastnosti určitého integrálu: linearita integrálu, aditivita v mezích. Dále se pomocí těchto základních vlastností dá odvodit[4] **základní věta analýzy**, která zní: Je-li F primitivní funkce k f, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. A z toho nám plyne velice důležitý důsledek: pomocí kalkulu pro integrování jsme schopni (když najdeme vzoreček pro primitivní funkci) spočítat plochu pod grafem dané funkce f jednoduše jako rozdíl $F(b) - F(a)$, kde F je primitivní funkce k f. Toto je velmi důležitý výsledek, protože pracujeme-li s kalkulem (obrácenou tabulkou vzorečků pro derivování), není vůbec nikde patrné, že to souvisí s nějakou geometrickou vlastností grafu původní funkce. A přitom je to pravda. Není to úžasné?

[3] Není to jediná matematicky přesná definice určitého integrálu, ale k představě, že to měří plochu pod grafem funkce, to stačí.

[4] Důkaz je spíše technický, není příliš těžký. Chápu ale, že když jej ve škole vynecháme, ztrácíme tím celý smysl zavedení určitého integrálu a studenti jsou ochuzeni o možnost zážitku z poznání stvrzenou slovy „Aha, tak je to tedy, proto se používá Riemannova definice!“

Riemanův integrál se definuje nejprve pro omezenou funkci (typicky spojitou) s omezenými (konečnými) mezemi a a b. Následně se rozšíří definice určitého integrálu na případy, kdy některá z mezí (nebo obě) je nekonečná nebo je integrovaná funkce v okolí meze neomezená. To je tzv. *nevlastní* určitý integrál a definuje se pomocí limity, tedy třeba pro případ neomezené horní meze:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b_-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z toho nám pak plyne, že lze pro nevlastní určitý integrál rozšířit základní větu analýzy, která nyní zní. Je-li F primitivní funkce k f a existují-li níže uvedené limity a má smysl jejich rozdíl (tj. vylučujeme případ $\infty - \infty$), pak je:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b_-} F(t) - \lim_{t\to a_+} F(t).$$

Výraz na pravé straně při výpočtech většinou zapisujeme pomocí hranatých závorek $[F(x)]_a^b$, což tedy lidově řečeno znamená: „zkus spočítat rozdíl $F(b) - F(a)$ a pokud ta čísla $F(b)$ a $F(a)$ přímo neexistují, spočítej místo nich odpovídající limity“.

Příklad 10.1. Spočítáme $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ pro různá $\alpha \in \mathbb{R}$. Čtenář si laskavě nakreslí graf nepřímé úměrnosti $1/x$ pro $x \in \langle 1, \infty)$ a dále si rozmyslí, jak se tento graf bude měnit v případě funkce $1/x^\alpha$ pro $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty & \text{pro } \alpha = 1, \\ \left[\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty - \dfrac{1}{1-\alpha} = \infty & \text{pro } \alpha < 1, \\ 0 - \dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{pro } \alpha > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Tento příklad ukazuje, že i neomezená oblast (např. pod grafem funkce $1/x^2$ na intervalu $\langle 1, \infty)$ může mít konečný obsah. Navíc vidíme, že případ $\alpha = 1$ tvoří jistý předěl mezi případy, kdy plocha vychází konečná a kdy nekonečná. Konkrétně $1/x$ má pod grafem nekonečnou plochu, ale funkce $1/x^{1{,}0001}$ se od předchozí liší jen nepatrně, ale má již pod svým grafem konečnou plochu. Rozmyslete si, jakou.

Příklad 10.2. Spočítáme $\int_0^1 1/x^\alpha$. Po provedení výpočtu (podobně jako v předchozím příkladě) máme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{pro } \alpha \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

V tomto případě nemáme neomezenou mez, ale neomezenou funkci, pod jejímž grafem sledujeme oblast podobnou jako v předchozím případě (jen převrácenou a otočenou o devadesát stupňů). Plocha pod grafem funkce $1/x^\alpha$ na intervalu $(0, 1\rangle$ je konečná, když $\alpha \neq 1$ a plocha pod grafem téže funkce na intervalu $\langle 1, \infty)$ je nekonečná. Toto platí i obráceně. Případ $\alpha = 1$ je hraniční, při něm plochy obou oblastí (z tohoto i předchozího příkladu) jsou nekonečné.

11 Řady

11.1 Součet řady

Řada je součet prvků nějaké posloupnosti. Úkolem tedy je sečíst typicky nekonečně mnoho reálných čísel. Zatím umíme sečíst dvě reálná čísla a díky asociativitě sčítání můžeme postupně sečíst konečně mnoho reálných čísel, například: $a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$.

Otázka tedy je, jak definovat součet nekonečně mnoha čísel a jak zjistit hodnotu nebo aspoň vlastnosti takového součtu. Protože máme exaktně definovánu limitu (umožňující pracovat s nekonečnem), je zřejmé, že pro definici nekonečného součtu ji použijeme.

Definice. Nechť $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ jsou částečné součty řady $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Čísla s_n umíme zjistit pro každý index $n \in \mathbb{N}$, protože sčítáme konečně mnoho čísel. *Součet řady* $\sum_{i=1}^\infty a_i$ je hodnota $\lim_{n\to\infty} s_n$, pokud taková limita existuje. Pokud tato limita je konečná, říkáme že řada *konverguje*, je-li nekonečná, říkáme, že řada diverguje (k $+\infty$ nebo $-\infty$). Pokud tato limita neexistuje, řada nemá součet.

Příklad 11.1. Sečteme řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)}.$$

Využijeme toho, že $1/(k\,(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$, takže částečný součet této řady je

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Z posledního vyjádření s_n je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ takže jednička je součet zadané řady.

Na tomto příkladě si uvědomíme, že abychom byli schopni vyčíslit součet dané řady, tedy najít $\lim s_n$, je nejprve nutné částečný součet s_n vyjádřit přímým vzorcem závislým na n a vyhnout se v tomto vyjádření kumulujícímu se počtu sčítanců. Jedině tak můžeme při výpočtu $\lim s_n$ použít limitní kalkulus a dobrat se k výsledku. Hledání přímého vzorce pro s_n je v obecném případě nesnadné a často to vůbec nejde, takže se součet zadané řady nedozvíme, třebaže existuje. Naši matematičtí předkové po sobě zanechali odkaz se součty mnoha všelijakých řad s použitím docela komplikovaných triků. My se to ale ve škole neučíme. Nám stačí k pochopení problematiky součtu řad předchozí příklad a dále budeme umět sčítat řadu geometrickou. Nic více.

Příklad 11.2. Řada $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ nemá součet, protože částečné součty jsou $s_n = 1$ pro lichá n a $s_n = 0$ pro sudá n a tato posloupnost s_n se dvěma různými hromadnými body nemá limitu.

Příklad 11.3. Geometrická řada je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pro kterou platí $a_{k+1} = q\,a_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Číslu q říkáme kvocient řady. Je tedy $a_k = q^{k-1}a_1$. K tomu, bychom vyjádřili přímý vzorec pro částečné součty geometrické řady, využijeme identitu:

$$(A^n - B^n) = (A - B)\,(A^{n-1} + A^{n-2}B^1 + A^{n-3}B^2 + \cdots + A^1B^{n-2} + B^{n-1}).$$

Kdo tomu nevěří, může si to zkusit roznásobit a dojde k poznání, že vzorec platí. V následujícím výpočtu vydělíme celou identitu činitelem $(A - B)$ a volíme $A = 1$, $B = q$.

Částečný součet geometrické řady je

$$s_n = (1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1})\,a_1 = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Tento vzorec vylučuje možnost $q = 1$, ovšem v tomto případě má geometrická řada částečný součet $n\,a_1$ a limita tohoto výrazu je $+\infty$ pro $a_1 > 0$, dále $-\infty$ pro $a_1 < 0$ a konečně 0 pro $a_1 = 0$. Zabývejme se dále jen případem $q \neq 1$.

Součet geometrické řady je:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_1 = 0, \\ \infty & \text{pro } q > 1,\ a_1 > 0, \\ -\infty & \text{pro } q > 1,\ a_1 < 0, \\ a_1 \dfrac{1}{1-q} & \text{pro } q \in (-1, 1), \\ \text{součet neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

Představme si úlohu s koláčem, který nejprve rozdělíme na polovinu a půlku dáme prvnímu hostu, zbylou půlku rozdělíme na půlku a dílek dáme druhému hostu, zbylý dílek rozdělíme na polovinu atd., jsme takto schopni podělit jedním koláčem nekonečně mnoho hostů[5]. Velikosti dílků představují členy geometrické řady s kvocientem $1/2$, první sčítanec má velikost $1/2$, takže když použijeme právě odvozený vzorec pro $q \in (-1, 1)$, tak zjistíme součet této řady:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,2 = 1.$$

Nás to nepřekvapí. Překvapovalo to ale dávné řecké filosofy, kteří v problému závodu Achyllese se želvou viděli paradox, protože si neuvědomili, že i nekonečně mnoho časových úseků, které se sčítají, se nakonec může odehrát v konečném čase.

---

[5] Při zjednodušení, že hmota v její libovolně malé části je dále dělitelná, tj. není složená z atomů.

11.2 Kritéria konvergence řady

V dalším textu rezignujeme na možnost najít součet dané řady, protože najít přímé vyjádření částečného součtu s_n tak, aby se dala spočítat $\lim s_n$, ve většině případů nejde. Spokojíme se s tím, že budeme schopni odpovědět aspoň na otázku, zda řada konverguje (má konečný součet) nebo ne.

Uvědomíme si, že hodnoty prvních konečně mnoho členů řady neovlivní odpověď na otázku konvergence. Změníme-li konečně mnoho členů řady, pak (pokud existuje součet) se změní její součet o konečné číslo. Pokud ale je součet nekonečný nebo neexistuje, pak změna o konečné číslo tuto vlastnost nezmění. Proto budu při vyšetřování konvergence řady psát stručně $\sum^\infty a_k$ bez specifikace, od kterého indexu začínáme sčítat. Volba prvního indexu totiž nijak neovlivní odpověď na otázku konvergence.

Nutná podmínka konvergence. Konverguje-li řada $\sum^\infty a_k$, pak je $\lim a_k = 0$. Důkaz: je $a_n = s_n - s_{n-1}$ a dále protože řada konverguje, je $\lim s_n = s$. Pak je $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$.

Podmínka $\lim a_n = 0$ je nutná podmínka konvergence. Když neplatí, víme, že řada nemůže konvergovat. Když podmínka platí, otázka konvergence řady zůstává otevřena a je třeba nasadit další kritéria.

Příklad 11.4. Harmonická řada $\sum^\infty 1/k$ diverguje k nekonečnu, ačkoli platí $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$. Divergenci ověříme např. integrálním kritériem (uvedeme později).

Řada s nezápornými členy. Je-li $a_n \geq 0$, pak řada $\sum^\infty a^n$ konverguje nebo diverguje k ∞. Důkaz: posloupnost částečných součtů s_n je neklesající, takže limita s_n musí existovat.

Srovnávací kritérium. Je-li $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna n přirozená[6] a řada $\sum^\infty b_n$ konverguje, pak řada $\sum^\infty a_n$ konverguje. Důkaz: nechť σ_n je posloupnost částečných součtů řady $\sum^\infty b_n$. O ní víme, že má konečnou limitu σ. Dále pro posloupnost částečných součtů s_n řady $\sum^\infty a_n$ platí, že $s_n \leq \sigma_n$ a je neklesající, musí mít tedy konečnou limitu $s \leq \sigma$.

Podílové (d'Alambertovo) kritérium. formulované pomocí limit. Nechť $a_k > 0$.

$$\text{Je-li } \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \begin{cases} < 1, & \text{řada } \sum^\infty a_k \text{ konverguje,} \\ = 1, & \text{kritérium nedává odpověď na konvergenci,} \\ > 1, & \text{řada } \sum^\infty a_k \text{ diverguje k } \infty. \end{cases}$$

Důkaz tohoto kritéria se opírá o srovnávací kritérium, ve kterém se zadaná řada porovná s geometrickou řadou s kvocientem $q \in (-1, 1)$, o níž víme, že konverguje. Podrobný důkaz vynechám.

Leibnizovo kritérium. Nechť členy řady $\sum^\infty a_k$ pravidelně střídají znaménka. Pokud $\lim a_k = 0$ a posloupnost $|a_k|$ je klesající, pak řada $\sum^\infty a_k$ konverguje.

Integrální kritérium. Nechť $f\colon \langle 1, \infty) \to \mathbb{R}$ je nerostoucí nezáporná funkce. Pak $\sum^\infty f(k)$ konverguje právě když $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Toto kritérium můžeme použít tehdy, když je dána řada $\sum^\infty a_k$ s nerostoucími a nezápornými členy a povede se k ní najít funkce f nerostoucí a nezáporná taková, že $f(k) = a_k$. Umíme-li najít určitý integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, pak umíme rozhodnout o konvergenci dané řady $\sum^\infty a_k$.

Důkaz integrálního kritéria: Porovnáme-li plochu pod grafem funkce f v úseku od k do $k+1$ s obdélníčky šířky 1 a výšky $f(k)$ a $f(k+1)$, shledáme, že $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1)$, protože f je nerostoucí. Sečteme-li všechny tyto jednotlivé dílky, máme $\sum^\infty f(k) \geq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum^\infty f(k) - f(1)$. Z toho plyne ekvivalence konvergence integrálu a řady.

Příklad 11.5. Členy harmonické řady $\sum^\infty 1/k$ lze proložit klesající funkcí $f(x) = 1/x$, která vyhovuje integrálnímu kritériu. Protože $\int_1^\infty 1/x\,\mathrm{d}x = \infty$ (viz příklad 10.1), harmonická řada $\sum^\infty 1/k$ diverguje.

Z výsledku příkladu 10.1 a z integrálního kritéria navíc vidíme, že řada $\sum^\infty 1/k^\alpha$ konverguje pro $\alpha > 1$, takže $\alpha = 1$ (harmonická řada) je hraničním případem, od kterého všechny řady typu $\sum^\infty 1/k^\alpha$ pro $\alpha \leq 1$ divergují.

Povšimneme si ještě, že na řadách typu $\sum^\infty 1/k^\alpha$ selže d'Alambertovo kritérium. Například o řadě $\sum^\infty 1/k^2$ víme z integrálního kritéria, že konverguje, ale d'Alambertovo kritérium dává

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2 + 2k + 1} = 1,$$

takže toto kritérium nám nedá informaci o konvergenci řady $\sum^\infty 1/k^2$.

[6] Protože změna konečně mnoha členů neovlivní konvergenci, stačí předpokládat $n > n_0$, kde n_0 je nějaký výchozí index.

11.3 Absolutní konvergence

Řada $\sum^\infty a_k$ je *absolutně konvergentní* pokud řada $\sum^\infty |a_k|$ je konvergentní. Pro řady s nezápornými členy tyto dva pojmy samozřejmě splývají.

Tvrzení o absolutní konvergenci.. Je-li řada absolutně konvergentní, je konvergentní. Důkaz: Označme S_n posloupnost částečných součtů řady $\sum^\infty |a_k|$ a s_n je posloupnost částečných součtů řady $\sum^\infty a_k$. Z předpokladu víme, že $\lim S_n$ je konečná. Pro S_n tedy platí Cauchyovská podmínka: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $m, n > n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $m > n$. Uvědomíme si, že je $|S_m - S_n| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$ a s použitím trojúhelníkové nerovnosti máme:

$$\varepsilon > |S_m - S_n| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \geq |a_{n+1} + \cdots + a_m| = |s_m - s_n|.$$

Takže i pro posloupnost s_n platí Cauchyovská podmínka. Má tedy konečnou limitu a řada $\sum^\infty a_k$ je konvergentní.

Obrácené tvrzení, že z konvergence plyne absolutní konvergence, neplatí. To dokládá klasický příklad řady $\sum^\infty (-1)^k/k$. Tato řada vyhovuje předpokladům Leibnizova kritéria: její členy pravidelně střídají znaménka, posloupnost jejích členů má limitu rovnu nule a posloupnost $1/k$ je klesající. Takže řada $\sum^\infty (-1)^k/k$ podle Leibnizova kritéria konverguje. Přitom řada obsahující absolutní hodnoty členů původní řady $\sum^\infty 1/k$ diverguje, jak bylo ukázáno v příkladu 11.5.

Když vyšetřujeme konvergenci řady, ve které se vyskytují kladné i záporné členy, je dobré začít otázkou na absolutní konvergenci, protože v kritériích konvergence často potřebujeme nezápornost členů řady. Pokud ověříme absolutní konvergenci, plyne nám z ní i konvergence. Pokud ale zjistíme, že řada absolutních členů nekonverguje, nevíme o konvergenci původní řady nic.

Neabsolutně konvergentní řada. Řadě, která konverguje, ale nekonverguje absolutně, říkáme *neabsolutně konvergentní řada*. Taková řada má velmi zajímavou vlastnost: „neplatí komutativní zákon". Přesněji řečeno, součet řady závisí na pořadí členů řady. Změnou pořadí členů řady můžeme dospět ke zcela libovolnému součtu. Vysvětlíme si proč. Z neabsolutně konvergentní řady $\sum^\infty a_k$ vyjmeme všechny kladné členy a dáme je do jedné posloupnosti b_k. Záporné členy dáme do druhé posloupnosti c_k. Platí $\sum^\infty b_k = \infty$ a $\sum^\infty c_k = -\infty$, protože kdyby obě sumy byly konečné, pak by také $\sum^\infty |a_k|$ měla konečnou sumu, což podle předpokladu není. Kdyby byla jedna suma konečná a druhá nekonečná, pak by $\sum^\infty a_k$ byla nekonečná, což také podle předpokladu není. Řada $\sum^\infty a_k$ konverguje, takže platí nutná podmínka $\lim a_k = 0$ a je tedy také $\lim b_k = 0$ a $\lim c_k = 0$. Nyní se rozhodneme, že chceme vyrobit součet řady třeba 42. Sčítáme postupně členy posloupnosti b_k tak dlouho, až překročíme hodnotu 42. To se určitě po konečně mnoha krocích podaří, protože suma všech členů b_k je nekonečná. Pak k výslednému součtu přičítáme postupně členy posloupnosti c_k, až součet poprvé klesne pod hodnotu 42. To se jistě také podaří. Pak pokračujeme přičítáním zbylých členů z posloupnosti b_k, až bude celkový součet zase větší než 42, pak zase přičítáme zbylé členy posloupnosti c_k, až částečný součet klesne pod hodnotu 42 a tak postupujeme pořád dokola, až vyčerpáme všechny členy z posloupností b_k a c_k. Částečné součty takto sestavené řady oscilují kolem hodnoty 42 a jejich odchylky od hodnoty 42 mají limitu nula, protože $\lim b_k = \lim c_k = 0$. Takže limita částečných součtů je rovna číslu 42 a tedy součet takto uspořádané řady je 42. Můžete si rozmyslet, že se dá najít i takové uspořádání členů a_k, při kterém je jejich suma nekonečná nebo neexistuje.

Čtenáře můžeme uklidit, že pokud je řada absolutně konvergentní, její součet je jediný a nezávisí na uspořádání členů posloupnosti. V tomto případě totiž $\sum^\infty b_k$ i $\sum^\infty c_k$ jsou konečná čísla a součet řady $\sum^\infty a_k$ je roven $\sum^\infty b_k + \sum^\infty c_k$.

11.4 Mocninné řady

Řada s proměnnou x ve tvaru $\sum^\infty a_k\,(x-c)^k$ se nazývá *mocninná řada*. V tomto tvaru máme například Taylorovy polynomy.

Při volbě konkrétního čísla $x \in \mathbb{R}$ se mocninná řada stává běžnou řadou, tedy součtem reálných čísel a má smysl se ptát na její součet nebo aspoň na její konvergenci. Přitom se hodí použít d'Alambertovo kritérium na absolutní konvergenci. Řada absolutně konverguje, když

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|\,|x-c|^{k+1}}{|a_k|\,|x-c|^k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |x-c| < 1.$$

tedy při označení $L = \lim |a_{k+1}/a_k|$ (pokud tato limita existuje) řada absolutně konverguje pro

$$|x-c| < \frac{1}{L}.$$

To znamená, když vzdálenost x od bodu c je menší než $1/L$, řada konverguje. Z toho důvodu číslu c říkáme střed konvergence a číslu $1/L$ poloměr konvergence.

Co se stane, když $|x-c| > 1/L$? Tj. $\lim|a_{k+1}/a_k|\,|x-c| > 1$, takže od jistého indexu n_0 platí, že $|a_{k+1}/a_k|\,|x-c| > 1$, což znamená $|a_{k+1}|\,|x-c| > |a_k|$ a tedy $|a_{k+1}|\,|x-c|^{k+1} > |a_k|\,|x-c|^k$. Vidíme, že od indexu n_0 je posloupnost $\left|a_k\,(x-c)^k\right|$ rostoucí a nemůže tedy mít limitu rovnu nule. Takže také $\lim a_k\,(x-c)^k \neq 0$ a není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum^\infty a_k\,(x-c)$. Tato řada diverguje.

Konvergenci ve dvou zbylých případech, kdy $|x-c| = 1/L$, je třeba vyšetřit jiným způsobem v závislosti na konkrétní úloze.

Příklad 11.6. Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{k=0}^\infty x^k/k!$, o níž víme, že vrací hodnoty exponenciální funkce. Je to mocniná řada $\sum^\infty 1/k!\,(x-0)^k$. Použijeme d'Alambertovo kritérium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right|\,|x-0| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right|\,|x| = 0\cdot|x| = 0 < 1.$$

Tato řada absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V tomto případě je $L = \lim|a_{k+1}/a_k| = 0$ a poloměr konvergence je ∞.

12 Komplexní exponenciální funkce

Pokud důvěřujete tvrzení, že funkční hodnoty e^{ix} běhají po jednotkové kružnici a jejich argumentem je x, nemusíte se tímto dodatkem zabývat. Pokud Vás naopak zajímá, jak by se to dalo zdůvodnit bez hlubší znalosti komplexní analýzy, čtěte dále.

Definice. Nejprve definujeme exponenciální funkci s komplexním argumentem $x \in \mathbb{C}$ řadou, kterou známe z (2). Tu řadu sem přepíšeme, abychom ji měli na očích

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Částečný součet této řady končící výrazem $x^k/k!$ označíme $S_k(x)$. Tato řada je dle podílového kritéria absolutně konvergentní pro všechna $|x| \in \mathbb{R}$, tedy je konvergentní pro všechna komplexní x a dává nám tedy hodnotu komplexní funkce $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Budeme ji častěji a dle letitých zvyklostí zapisovat výrazem e^x. Na reálných číslech je samozřejmě nově zavedená funkce e^x shodná s původní funkcí e^x.

Důležitá limita. Tvrzení $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$ zůstává v platnosti i pro $x \in \mathbb{C}$, protože

$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots - 1}{x} - 1\right| = \left|1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots - 1\right| = |x| \left|\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots\right| \le$$
$$\le |x| \left(\frac{1}{2!} + \frac{|x|}{3!} + \frac{|x|^2}{4!} + \cdots\right) \le |x| \left(1 + \frac{|x|}{1} + \frac{|x|^2}{2!} + \cdots\right) = |x|\, e^{|x|} \overset{|x|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Základní vlastnost mocniny. Také je nutné ověřit, že pro e^x platí základní vlastnost mocniny, tedy $e^x e^y = e^{x+y}$, $x, y \in \mathbb{C}$. To uděláme tak, že shledáme, že vzdálenost částečných součtů výrazů na levé a pravé straně má limitu 0, přesněji $\lim_{k\to\infty}|S_k(x)\, S_k(y) - S_k(x+y)| = 0$. K tomu účelu se nesmíme bát to roznásobit. Zjistíme, že $S_k(x)\, S_k(y)$ je součet všech polynomů tvaru $x^p y^q/(p!q!)$ takových, že $p \le k$, $q \le k$. Jmenovitě ten součet obsahuje právě všechny takové polynomy se stupněm nevýše k a navíc některé další až po stupeň $2k$. (Za stupeň polynomu $x^p y^q$ považuji číslo $p + q$.) Roznásobení $S_k(x + y)$ vyžaduje více trpělivosti a péče, protože na každý sčítanec musíme uplatnit binomickou větu. Pak ale s úžasem zjistíme, že $S_k(x + y)$ obsahuje právě všechny polynomy $x^p y^q/(p!q!)$ se stupněm nejvýše k. V rozdílu $S_k(x)\, S_k(y) - S_k(x + y)$ tedy zůstanou jen některé další polynomy stupně většího než k. Takže z trojúhelníkové nerovnosti a z faktu, že $|xy| = |x|\,|y|$, plyne, že $|S_k(x)\, S_k(y) - S_k(x + y)|$ je menší než součet některých polynomů tvaru $|x|^p|y|^q/(p!q!)$ stupně většího než k a ten je menší než součet všech takových polynomů stupně většího než k což je zbytek Taylorova polynomu řádu k v bodě nula funkce $e^{|x|+|y|}$. A protože Taylorova řada k této funkci konverguje, je limita Taylorova zbytku rovna nule.

Spojitost. Dále si uvědomíme, že e^x je všude spojitá, protože

$$\lim_{h\to 0} e^h = \lim_{h\to 0} e^h - 1 + 1 = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} h + 1 = 1 \cdot 0 + 1 = 1,$$
$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} = \lim_{h\to 0} e^x e^h = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Ryze imaginární argument. Nyní se zaměříme jen na čísla e^{it} pro $t \in R$. Nejprve si všimneme, že $e^{-it} = 1/e^{it}$, protože platí $1 = e^0 = e^{-it+it} = e^{-it}e^{it}$. Také je $e^{-it} = \overline{e^{it}}$, kde symbolem $\overline{z}$ značím komplexně sdružené číslo k číslu z. To plyne přímo z definice e^{it}:

$$\overline{e^{it}} = \overline{1 + \frac{it}{1} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots} = 1 + \frac{-it}{1} - \frac{t^2}{2!} - \frac{-it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{i(-t)}{1} - \frac{(-t)^2}{2!} - \frac{i(-t)^3}{3!} + \frac{(-t)^4}{4!} + \cdots = e^{-it}.$$

Je dále nutně $\left|e^{it}\right| = 1$, protože z rovnosti $e^{-it} = 1/e^{it}$ máme $\left|e^{-it}\right| = 1/|e^t|$ a navíc musí $\left|e^{-it}\right| = \left|e^{it}\right|$, neboť $|z| = |\overline{z}|$. Číslo e^{it} tedy leží na jednotkové kružnici a je rozumné sledovat jeho argument (úhel mezi osou x a spojnicí nuly s daným komplexním číslem).

Všeobecně se ví, že součin komplexních čísel má argument ve tvaru součtu argumentu jednotlivých činitelů, takže $\arg(e^{i(t+u)}) = \arg(e^{it}e^{iu}) = \arg(e^{it}) + \arg(e^{iu})$, navíc $\arg e^0 = \arg(1) = 0$. Při značení

$f(t) = \arg e^{it}$ tyto skutečnosti můžeme zapsat jako $f(t+u) = f(t)+f(u)$ a taky $f(0) = 0$. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je navíc spojitá, takže existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $f(t) = Ct$ (viz internet, Cauchyovská funkcionání rovnice). Máme tedy výsledek $\arg(e^{it}) = Ct$. Další naší snahou bude ukázat, že $C = 1$. Až to budeme mít, budeme vědět, že $\arg(e^{it}) = t$ a že se tedy číslo e^{it} při zvětšujícím se t plynule točí po jednotkové kružnici.

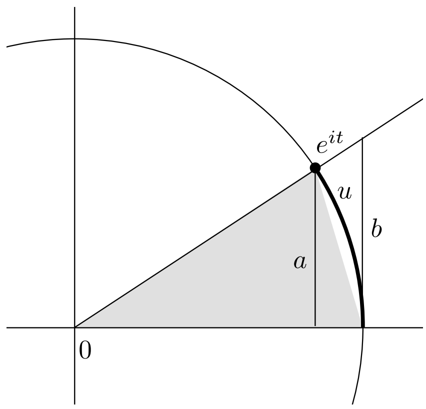
Konstantu C najdeme pomocí limity $C = \lim_{t\to 0^+} \frac{Ct}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arg(e^{it})}{t}$. Předně je vidět, že $C \geq 0$ protože e^{it} má pro kladné a dostatečně malé t kladnou imaginární část a tedy i argument. Kladnost imaginární části zjistíme pohledem na imaginární část řady pro e^{it}: všechny částečné součty $S_k(t)$ jsou pro kladné dostatečně malé t kladné. V následujícím textu prozkoumáme $\lim_{t\to 0+} = \frac{\arg(e^{it})}{t}$ důkladněji.

Protože platí komplexní $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$, platí totéž i pro konkrétní cestu k nule podél přímky $x = it$, kde $t \in \mathbb{R}$. Navíc budeme sledovat jen reálnou část podílu:

$$1 = \lim_{t\to 0} \operatorname{Re} \frac{e^{it} - 1}{it} = \lim_{t\to 0} \operatorname{Re} \frac{(-i)(e^{it} - 1)}{t} = \lim_{t\to 0} \operatorname{Im} \frac{e^{it} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Im}(e^{it}) - \operatorname{Im}(1)}{t},$$

tedy:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Im} e^{it}}{t} = 1. \tag{11}$$



Ukážeme dále, že pro malá kladná t se $\operatorname{Im} e^{it}$ příliš neliší od $\arg(e^{it})$, přesněji že $\lim_{t\to 0^+} \frac{\arg(e^{it})}{\operatorname{Im}(e^{it})} = 1$. Na obrázku je $a = \operatorname{Im}(e^{it})$, dále $u = \arg(e^{it})$ je délka oblouku a $b = a/\sqrt{1-a^2}$ z Pythagorovy věty a z podobnosti trojúhelníků. Obrázek je nakreslen jen pro $\arg(e^{it}) \in (0, \pi/2)$, což nám ale pro vyšetření limity pro $t \to 0+$ (a tedy též $Ct = \arg(e^{it}) \to 0^+$) stačí. Plocha šedého trojúhelníku je $a/2$, plocha kruhové výseče je $u/2$ a je větší a plocha trojúhelníku se stranou b je $b/2$ a je největší. Z tohoto porovnání máme $a \leq u \leq b$ a tedy $1 = \frac{a}{a} \leq \frac{u}{a} \leq \frac{b}{a}$. Takže

$$1 \leq \lim_{a\to 0^+} \frac{u}{a} \leq \lim_{a\to 0^+} \frac{b}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = 1$$

Věta o dvou strážnících nám říká, že prostřední limita musí být rovna jedné. To je ve skutečnosti limita

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\arg(e^{it})}{\operatorname{Im} e^{it}} = 1.$$

Dostáváme nakonec

$$C = \lim_{t\to 0^+} \frac{Ct}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arg(e^{it})}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arg(e^{it})}{\operatorname{Im} e^{it}} \frac{\operatorname{Im} e^{it}}{t} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Takže náš řetízkový kolotoč podél jednotkové kružnice e^{it} se točí rychlostí 1.

Eulerův vzorec. Protože $\arg(-1) = \pi$ a -1 leží na jednotkové kružnici, platí:

$$e^{i\pi} = -1$$

Rozdělení exponentu na reálnou a imaginární část. Komplexní exponenciální funkci lze rozepsat:

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Poslední rovnost plyne z toho, že jsme definovali $\cos b = \operatorname{Re} e^{ib}$, $\sin b = \operatorname{Im} e^{ib}$.

Důkaz limity pro funkci sin v nule. Na závěr si ještě prosím všimněte, že jsme ve vzorci (11) dokázali důležitou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$