

Sylabus předmětu MAA pro SIT

Zkouška se dle <http://math.feld.cvut.cz/0educ/pozad/y01ma1.htm> skládá z písemné části a nepovinné ústní. Písemná část obsahuje 5 praktických úloh celkově ohodnocených 50 body a dvě teoretické úlohy celkově za 20 bodů.

Praktické úlohy se týkají výpočtů limit, derivací, neurčitých a určitých integrálů, ověřování konvergenčí řad, vyšetřování průběhů funkcí daných vzorečkem a užití dalších jednoduchých aplikací kalkulu v rozsahu témat uvedených na přednášce a cvičení.

Teoretické otázky se týkají následujících témat:

Množiny: Spočetné a nespočetné množiny, množina reálných čísel, hustota množiny racionálních čísel v množině reálných čísel, spočetnost a nespočetnost racionálních a reálných čísel (zdůvodnit), supremum a infimum množiny a jejich vztah k maximu a minimu množiny (zdůvodnit).

Limity: Definice limity funkce univerzální a rozepsaná pro případy vlastní/nevlastní hodnoty limity a vlastního/nevlastního bodu, v němž je počítána limita, zdůvodnění (z definice limity) kalkulu na počítání limit, zejména $1/\infty = 0$, $1/0^+ = \infty$, zdůvodnění hodnot některých jednoduchých limit z definice, například $e^\infty = \infty$, $e^{-\infty} = 0$, zdůvodnění neexistence limity z definice u jednoduchého příkladu, např. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$. Věta o sevření (s důkazem), věta o limitě součtu, součinu, rozdílu, podílu limit (důkaz jen pro součet). Zdůvodnění hodnot základních tří limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Proč nelze ve zdůvodnění těchto limit použít l'Hospitalovo pravidlo? Definice spojitosti funkce v bodě a spojitosti funkce na intervalu, věta o součtu, součinu, rozdílu a podílu spojitých funkcí, druhy nespojitostí, vlastnost mezihodnoty pro spojitou funkci (bez důkazu).

Derivace: Definice derivace v bodě a derivace na intervalu. Odvození z definice základních vzorečků kalkulu, zejména $c' = 0$, $(x^n)' = n x^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{Z}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$. Odvození vzorečků pro derivaci součtu, součinu, rozdílu a podílu. Věta o derivaci složené funkce (bez důkazu) a věta o derivaci inverzí funkce (včetně důkazu). Odvození dalších vzorečků kalkulu na základě předchozích vět, zejména $(\ln x)' = 1/x$, $(x^n)' = n x^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{R}$, $(\arctg x)' = \frac{1}{x^2+1}$. Odvození vzorečků pro tečnu a normálu ke grafu funkce. Rollova věta, Langrangeova věta, Cauchyova věta (včetně důkazů). L'Hospitalovo pravidlo (důkaz na známku A). Taylorův polynom, věta o zbytku Taylorova polynomu (bez důkazu). Užití derivace při vyšetřování průběhu funkcí, definice základních pojmů pro tuto problematiku: funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající na intervalu resp. v bodě, funkce konvexní a konkávní na intervalu, souvislost těchto pojmů se znaménkem derivace resp. druhé derivace (včetně zdůvodnění).

Integrál: Definice primitivní funkce a základní vlastnosti včetně zdůvodnění, linearita integrálu, per partes, substituce (tyto věty s důkazem). Integrovaní racionální lomené funkce užitím parciálních zlomků. Riemannova definice určitého integrálu. Z této definice odvození linearity určitého integrálu a aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru. Základní věta kalkulu, tj. vztah určitého integrálu a limit primitivní funkce v krajních bodech (včetně důkazu). Konstrukce primitivní funkce jako určitého integrálu s proměnlivou horní mezí (důkaz na známku A). Problematika nevlastního integrálu. Systematika určení existence/konvergence/divergence určitého integrálu z racionální lomené funkce. Aplikace určitého integrálu pro výpočet ploch mezi grafy, délky křivky, objemu a povrchu rotačních těles.

Posloupnosti: Nezávislost limity posloupnosti na konečně hodnotách a omezenost konvergentní posloupnosti (s důkazem s využitím definice limity). Záruka existence aspoň jednoho hromadného bodu posloupnosti (včetně důkazu). Souvislost počtu hromadných bodů posloupnosti s existencí limity (včetně důkazu). Vztah mezi limitou rostoucí (neklesající) posloupnosti a jejím supremem (včetně důkazu). Analogicky pro klesající posloupnost.

Řady: Definice součtu nekonečné řady, vlastnosti geometrické řady, nutná podmínka konvergence řady (s důkazem). Nezávislost konvergence řady na konečně mnoha členech řady (zdůvodnit). Kritéria konvergence řad včetně důkazů: srovnávací, podílové, odmocninové, integrální. Zdůvodnit důsledky přerovnání členů neabsolutně konvergentní řady a absolutně konvergentní řady.