1 Souřadnice vektorů, matice přechodu, matice transformací

Ukážeme, že lineární zobrazení ve vektorových prostorech konečné dimenze i přechody bází se dají charakterizovat maticí. Tato matice (označíme ji $\boldsymbol{A}$) má úžasnou vlastnost: lze pomocí ní počítat souřadnice obrazu v příslušné lineární transformaci maticovým součinem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ za předpokladu, že známe souřadnice vzoru, které jsou připraveny ve sloupcovém vektoru $\boldsymbol{x}$. Nebo: známe-li souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k nějaké výchozí bázi a uložíme-li je do sloupcového vektoru $\boldsymbol{x}$, pak souřadnice stejného vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k jiné bázi lze počítat pomocí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. V této kapitole zavedeme zmíněné matice a ukážeme jejich vlastnosti. Nejprve je potřeba připomenout pojem souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k dané bázi $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$.

1.1 Souřadnice vzhledem k bázi

Předpokládáme, že $\boldsymbol{u} \in V$, kde V je libovolný vektorový prostor konečné dimenze a tento vektorový prostor má bázi $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$. **Souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi** B je sloupcový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ koeficientů[1], tedy $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ takový, že platí

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Upozorňujeme, že na pravé straně této rovnosti je soubor vektorů $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ násobený podle pravidla maticového násobení sloupcovým vektorem (jednosloupcovou maticí) koeficientů z $\mathbb{R}$. Rovnost lze rozepsat podrobněji jako:

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1\, x_1 + \cdots + \boldsymbol{b}_n\, x_n = x_1\, \boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\, \boldsymbol{b}_n$$

Nejprve jsme uvedli zápis tak, jak přímo plyne z rozepsání maticového násobení a poté jsme zápis mírně umravnili, protože je vhodné dodržovat obvyklé pravidlo, že součin „skalár krát vektor" zapisujeme v tomto pořadí, nikoli tedy v pořadí „vektor krát skalár". Uvědomíme si tedy, že v rovnici (1) je „skryté" maticové násobení, které navíc není zcela obvyklé, protože nenásobí jen skaláry mezi sebou (jako u obvyklého maticového násobení), ale vytváří sumu výrazů „skalár krát vektor", tedy vytváří lineární kombinaci, jejíž koeficienty jsou napsány ve sloupcové matici skalárů $\boldsymbol{x}$ vpravo. Ačkoli se to zdá neobvyklé, pro zavedení matic zobrazení a matic přechodů bází se tento zápis ukáže jako velice praktický. Proto by se s ním měl čtenář důkladně seznámit. Později již nebudeme toto maticové násobení rozepisovat, ale každý by měl v takovém zápisu vidět, jaká je zde zapsána lineární kombinace vektorů.

Připomeňme ještě důležité vlastnosti souřadnic vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi.

Věta 1. Nechť je V vektorový prostor s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} \in V$ v bázi B existují pro libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a pro každý takový vektor $\boldsymbol{u}$ jsou souřadnice určeny tou bází B a vektorem $\boldsymbol{u}$ jednoznačně. Dále platí, že při pevně zvolené bázi B je zobrazení, které vektoru $\boldsymbol{u} \in V$ přidělí jeho vektor souřadnic $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, izomorfním zobrazením (tedy je prosté, je na a je lineární).

Důkaz: Že souřadnice existují plyne z toho, že lineární obal báze vyplní celý prostor V, takže každý vektor lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze. Další část důkazu je procvičováním správného pochopení rovnosti (1). K důkazu jednoznačnosti souřadnic předpokládejme, že máme dva sloupce souřadnic $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ stejného vektoru $\boldsymbol{u} \in V$. Ukážeme, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Platí $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x}$ a také $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{y}$. Dostáváme:

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

V úpravách jsme využili distributivní zákon platný pro maticové násobení. Vpravo máme napsanou lineární kombinaci prvků báze B s koeficienty $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ a vidíme, že se má rovnat nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$. Protože báze B je lineárně nezávislá, musí být tato lineární kombinace triviální, takže sloupec koeficientů této lineární kombinace $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ musí obsahovat samé nuly, což znamená, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. To dokazuje jednoznačnost souřadnic.

[1] Kdykoli vidíte napsáno v tomto textu $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}$, můžete to nahradit zápisem $\mathbb{T}^n$ nebo $\mathbb{T}$ (kde $\mathbb{T}$ je obecné těleso) a vše bude platit stejně. Protože je zobecnění z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{T}^n$ takto přímočaré, nebudeme se v textu dále vyčerpávat tím, že bychom se nutili představovat si obecné těleso skalárů, když je představa množiny $\mathbb{R}$ daleko snadnější.

Aby bylo zobrazení $C : V \to \mathbb{R}^n$, které každému $\boldsymbol{u}$ přidělí jeho souřadnice $C(\boldsymbol{u})$, isomorfismem, musí být lineární, prosté a na. K důkazu linearity stačí prozkoumat souřadnice lineární kombinace $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ vektorů z V a uvědomit si, že $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, C(\boldsymbol{u})$ a $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, C(\boldsymbol{v})$. Takže:

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} &= \alpha\, (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, C(\boldsymbol{u}) + \beta\, (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, C(\boldsymbol{v}) = \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \big(\alpha C(\boldsymbol{u})\big) + (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \big(\beta C(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \big(\alpha C(\boldsymbol{u}) + \beta C(\boldsymbol{v})\big).\end{aligned}$$

V úpravách jsme použili obvyklé vlastnosti maticového násobení. Vidíme tedy, že vektor $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ má souřadnice $\alpha C(\boldsymbol{u}) + \beta C(\boldsymbol{v})$, takže zobrazení C je lineární.

Dále je zřejmé, že k libovolnému vektoru souřadnic $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ lze najít $\boldsymbol{u} \in V$, který má tyto dané souřadnice v bázi B. To uděláme jednoduše pomocí maticového násobení $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x}$, takže C je surjektivní (je na $\mathbb{R}^n$). C je navíc prosté, protože dva různé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nemohou mít stejné souřadnice. Kdyby měly, pak $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x}$ a také $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x}$. To vede na kuriózní výsledek $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$, takže vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ musejí být stejné. Zobrazení C přidělující vektorům jejich souřadnice, je tedy isomorfismus. ∎

Poznámka: Právě zmíněný výsledek patří k nejdůležitějším výsledkům lineární algebry vektorových prostorů konečné dimenze. Mimo jiné nám umožňuje přecházet od geometrické představy o vektorech k numerickému počítání s jejich souřadnicemi a kdykoli se zpět vracet ke geometrické představě. Přechod k souřadnicím a zpět neztratí žádnou informaci, protože tento přechod je isomorfismem. Stačí tedy v lineárním prostoru geometrických vektorů V nakreslit souřadnicový systém (bázi) a vzhledem k němu vyjadřovat vektory uspořádanými dvojicemi či trojicemi jejich souřadnic. Na této numerické úrovni pak můžeme provádět různé maticové výpočty, které zpětně vypovídají něco o původním geometrickém světě. V geometrickém vektorovém prostoru V vytváříme součty vektorů a skalární násobky vektorů (tedy lineární kombinace) doplňováním na rovnoběžník a dalším specifickým šermováním s pravítkem a kružítkem nad papírem (podrobněji jindy). Isomorfismus souřadnic převádí tyto geometrické operace na obvyklé sčítání a násobení reálných čísel. V geometrickém světě si můžeme problém vizualizovat a v odpovídajícím světě uspořádaných n-tic pak můžeme problém pohodlně počítat.

V tomto textu je často zmíněn obecný vektorový prostor V a vedle toho se zde píše o souřadnicích vektorů tohoto prostoru z $\mathbb{R}^n$. Vektorový prostor V je dobré si představovat jako prostor geometrických vektorů (šipek), zatímco $\mathbb{R}^n$ je samozřejmě prostor uspořádaných n-tic.

Poznámka: Předpokládejme, že máme dánu bázi $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ přímo v lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ (místo v obecném lineárním prostoru V) a budeme tedy hledat souřadnice vektorů $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k takové bázi B. Báze B je v tomto případě soubor sloupců uspořádaných n-tic, ze kterých můžeme vytvořit matici $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a definiční rovnost (1) pro souřadnice přechází na tvar $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{x}$. Známe-li vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ samotný a chceme znát jeho souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k B, musíme tedy spočítat $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$.

V $\mathbb{R}^n$ je jedna tzv. standardní báze $E = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_i)$. Tyto vektory $\boldsymbol{e}_i$ obsahují všude nuly, jen jedinou jedničku na i-tém místě. Sestavíme-li z těchto sloupcových vektorů matici, je to matice jednotková $\boldsymbol{E}$ a definiční rovnost (1) nám pak říká, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, neboli, že složky vektoru $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ jsou zároveň jeho souřadnicemi ve standardní bázi.

1.2 Matice souboru vektorů vzhledem k bázi

Předpokládejme, že je dán soubor vektorů $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m)$ ve vektorovém prostoru V a dále je dána báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ vektorového prostoru V. Ukážeme, že existuje právě jediná matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, splňující rovnost:

$$(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)\, \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

Tuto matici budeme nazývat **maticí souboru vektorů** $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m)$ **vzhledem k bázi** B. Rovnost (2) bude definičním vztahem pro všechny potřebné matice, které v této sekci zavedeme. Je tedy potřeba si tuto rovnost důkladně zapamatovat a uvědomit si podrobě, jak funguje.

Když se zaměříme vlevo ve vzorci (2) na první vektor $\boldsymbol{u}_1$, vidíme, že tomu na pravé straně odpovídá násobení báze B prvním sloupcem matice $\boldsymbol{A}$. To odpovídá rovnici (1), takže v prvním sloupci matice $\boldsymbol{A}$ musejí být souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}_1$ vzhledem k bázi B. Podobně v i-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$ musejí být souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}_i$ vzhledem k bázi B. Protože tyto souřadnice dle věty 1 existují a jsou určeny jednoznačně, musí matice v definiční rovnosti (2) existovat a je určena jednoznačně. Dokonce vidíme, jakými koeficienty ji máme (po sloupcích) naplnit. Také si stojí za to všimnout, že tato matice má nutně m řádků a n sloupců.

V dalším textu se na levé straně rovnice (2) bude také často vyskytovat soubor vektorů, které jsou obrazy při nějakém lineárním zobrazení $T : U \to V$. Tedy: $\big(T(\boldsymbol{u}_1), \dots T(\boldsymbol{u}_n)\big)$. Pro tento soubor vektorů budeme někdy používat zkrácené značení $T(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$. Je dobré si uvědomit, že při takovém značení a pro každou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ platí vztah

$$T\big((\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{A}\big) = T(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{A} \tag{2a}$$

Uvedeme, proč toto platí. Na levé straně této rovnosti je i-tý vektor daného souboru vektorů ve tvaru $T\big((\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{a}_i)\big)$, kde $\boldsymbol{a}_i$ je i-tý sloupec matice $\boldsymbol{A}$. Protože je T lineární, je obraz lineární kombinace vektorů roven lineární kombinaci obrazů těchto vektorů se stejnými koeficienty, tedy je

$$T\big((\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{a}_i)\big) = \big(T(\boldsymbol{u}_1), \dots T(\boldsymbol{u}_n)\big)\,\boldsymbol{a}_i = T(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{a}_i$$

Výraz na pravé straně této rovnosti odpovídá i-tému vektoru v souboru vektorů tvaru $T(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{A}$, takže jsme dokázali, že i-tý vektor v souboru vektorů na levé straně rovnosti (2a) je roven i-tému vektoru na pravé straně této rovnosti, tudíž rovnost (2a) platí.

1.3 Matice přechodu bází

Nechť máme dvě báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ stejného vektorového prostoru V. Pak matici souboru vektorů C vzhledem k bázi B, tedy matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující:

$$(\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{A}. \tag{3}$$

nazýváme **maticí přechodu báze C vzhledem k bázi B**. Povšimneme si, že toto je čtvercová matice, která ve sloupcích obsahuje souřadnice vektorů $\boldsymbol{c}_i$ vzhledem k bázi B. Za chvíli ukážeme, že tato matice je regulární a dále že nám tato matice umožní přechod od známých souřadnic vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k C k souřadnicím stejného vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k B. Proto se této matici také říká matice přechodu od báze C k bázi B. Kromě toho tato matice svým maticovým násobením na pravé straně (3) přemění vstupní bázi B na výstupní bázi C, takže v jiné literatuře bohužel najdeme i konflitní označení, že to je matice přechodu od B k C. Abychom se těmto konfliktům vyhnuli, budeme této matici nadále říkat výhradně matice přechodu báze C vzhledem k bázi B.

Věta 2. Matice přechodu definovaná vztahem (3) je čtvercová a regulární.

Důkaz: Že je $\boldsymbol{A}$ čtvercová plyne z toho, že soubor vektorů na levé i pravé straně rovnosti (3) je stejně početný. Je to tedy matice z $\mathbb{R}^{n,n}$. Kdyby neměla být matice $\boldsymbol{A}$ regulární, pak by existovala netriviální lineární kombinace jejích sloupců (označíme je symboly $\boldsymbol{x}_i$) rovna nulovému vektoru. Muselo by tedy platit, že $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$, a přitom některé α_i je nenulové. Nyní vynásobíme zprava rovnost (3) sloupcem koeficientů $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ a dostáváme:

$$\alpha_1\boldsymbol{c}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{c}_n = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

Takže máme netriviální lineární kombinaci vektorů báze C, která je rovna nulovému vektoru. To je spor, protože báze C je lineárně nezávislý soubor vektorů. Sloupce matice $\boldsymbol{A}$ musí být lineárně nezávislé. ∎

Věta 3. Nechť $\boldsymbol{u} \in V$ je vektor vektorového prostoru V, nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ jsou báze tohoto vektorového prostoru. Nechť dále $\boldsymbol{A}$ je matice přechodu báze C vzhledem k B. Pokud sloupcový vektor $\boldsymbol{x}$ obsahuje souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi C, pak sloupcový vektor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ obsahuje souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi B.

Důkaz: Z předpokladů věty a podle rovnice (1) vidíme, že $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)\,\boldsymbol{x}$. Dále platí rovnost (3), takže:

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)\,\boldsymbol{x} = ((\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{y},$$

neboli, $\boldsymbol{y}$ obsahuje souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi B. ∎

Matice daná vlastností věty 3, tj. matice, pro kterou platí, že obsahuje-li $\boldsymbol{x}$ souřadnice nějakého vektoru vzhledem k bázi B, pak $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ obsahuje souřadnice stejného vektoru vzhledem k bázi C, je určena jednoznačně. Pokud by totiž ještě matice $\boldsymbol{A}'$ měla stejnou vlastnost, pak by $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}$ pro všechna $\boldsymbol{x}$, neboli $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ pro všechna $\boldsymbol{x}$, jmenovitě pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ (pro vektory standardní báze). Součin

$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')\boldsymbol{e}_i$ je roven i-tému sloupci matice $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')$, takže tyto všechny sloupce musejí být nulové. Tím pádem je $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')$ nulová matice a tedy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$.

Poznámka: Vynásobením rovnosti (3) maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ shledáváme, že $\boldsymbol{A}^{-1}$ je maticí báze B vzhledem k bázi C. To se často hodí, protože se stává, že máme matici $\boldsymbol{A}$ transformující souřadnice vektorů vzhledem k C na souřadnice vzhledem k B pomocí maticového násobení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, ale my to potřebuje zrovna obráceně: známe souřadnice $\boldsymbol{y}$ (vzhledem k B) a potřebujeme počítat souřadnice $\boldsymbol{x}$ (vzhledem k C). Vidíme, že to zvládneme pomocí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$. Matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ existuje, což bylo dokázáno ve větě 2.

Příklad: Nakreslit dvě báze v rovině pomocí šipek a hledat matice přechodu jedné báze v druhé a obráceně. Nakreslit do téže roviny ještě vektor $\boldsymbol{u}$ a ukázat, jak vypadají souřadnice tohoto vektoru k zobrazeným bázím a jak tyto souřadnice souvisejí s právě nalezenou maticí přechodu…

Příklad: Předpokládejme dvě báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_i)$ tentokrát v lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$. Úkolem je najít matici $\boldsymbol{A}$ báze C vzhledem k B, tj. matici, která umožní převádět souřadnice vzhledem k C na souřadnice vzhledem k B násobením $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Protože nyní výjimečně jsou vektory báze samy o sobě uspořádanými n-ticemi, je možné sestavit matice obsahující ve sloupcích tyto vektory, tedy $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i)$ a $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_i)$. Definiční rovnost (3) pro matici $\boldsymbol{A}$ pak přechází na tvar $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ a vynásobíme-li ji maticí $\boldsymbol{B}$ zleva, máme výsledek $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$. K tomuto výsledku je možné se dopracovat též řádkovou eliminací: $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{C}) \sim (\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C})$.

1.4 Matice lineární transformace

Nyní zavedeme matici lineární transformace na vektorovém prostoru V, tedy matici lineárního zobrazení $T : V \to V$ (je to lineární zobrazení do stejného vektorového prostoru, ve kterém jsou jeho vzory).

Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V a nechť $T : V \to V$ je lineární transformace. Pak matici souboru vektorů $\big(T(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T(\boldsymbol{b}_n)\big)$ vzhledem k bázi B, tedy matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující:

$$\big(T(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{A}. \tag{4}$$

nazveme **maticí transformace** T **vzhledem k bázi** B. Z předchozího plyne, že matice je čtvercová z $\mathbb{R}^{n,n}$ a ve sloupcích tato matice obsahuje souřadnice obrazů $T(\boldsymbol{b}_i)$ vzhledem k bázi B. Na rozdíl od matice definované vztahem (3) nemusí $\boldsymbol{A}$ být regulární, protože soubor vektorů $\big(T(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T(\boldsymbol{b}_n)\big)$ může být lineárně závislý.

Je dobré si uvědomit, že při pevně stanovené bázi B

(i) transformace T určuje matici $\boldsymbol{A}$ dle (4) jednoznačně a obráceně
(ii) matice $\boldsymbol{A}$ z $\mathbb{R}^{n,n}$ určuje také jednoznačně lineární transformaci T splňující (4).

Proč platí (i): transformace určí jednoznačně soubor vektorů na levé straně rovnosti (4) a tato rovnost určuje jednoznačně matici $\boldsymbol{A}$, jak bylo zdůvodněno pod rovností (2). Proč platí (ii): Báze a matice $\boldsymbol{A}$ při použití maticového násobení na pravé straně rovnosti (4) vygeneruje soubor vektorů, které mají být obrazy prvků báze $\boldsymbol{b}_i$ v hledané transformaci T. A dále z věty o lineárních zobrazeních víme, že lineární zobrazení je určeno svými obrazy na bázi jednoznačně.

Všimneme si, že rovnost (3) je z jistého pohledu jen speciálním případem rovnosti (4). Tedy, že matice $\boldsymbol{A}$ může být jednak maticí báze C vzhledem k bázi B a jednak maticí takové transformace T vzhledem k bázi B, která zobrazí jednotlivé vektory $\boldsymbol{b}_i$ na odpovídající vektory $\boldsymbol{c}_i$.

Nyní ukážeme klíčovou vlastnost matice transformace. Že totiž souřadnice obrazů lze počítat ze souřadnic vzorů maticovým násobením $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Věta 4. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V a nechť $T : V \to V$ je lineární transformace s maticí $\boldsymbol{A}$ vzhledem k B. Nechť vektor $\boldsymbol{u} \in V$ má souřadnice $\boldsymbol{x}$ v bázi B. Pak vektor $T(\boldsymbol{u})$ má souřadnice $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ v bázi B.

Důkaz: Zapíšeme předpoklad věty, tedy $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{x}$. Na obě strany této rovnosti uplatníme transformaci T a dostáváme:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) = T\big((\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{x}\big) &\overset{:1:}{=} \big(T(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T(\boldsymbol{b}_n)\big)\,\boldsymbol{x} \overset{:2:}{=} \big((\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{A}\big)\,\boldsymbol{x} = \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

Rovnost označená :1: platí z toho důvodu, že T je lineární, tj. přenáší lineární kombinace vzorů na lineární kombinace obrazů se stejnými koeficienty. Rovnost označená :2: plyne z (4) a dále je užit asociativní zákon maticového násobení. Vidíme tedy, že $\boldsymbol{y}$ obsahuje souřadnice vektoru $T(\boldsymbol{u})$ vzhledem k bázi B. ∎

Matice daná vlastností z věty 4 je určena jednoznačně ze stejných důvodů, jako je jednoznačná matice daná vlastností věty 3.

Skládání transformací lze realizovat maticovým násobením odpovídajících matic těchto transformací tak, že nejvíce vpravo v rámci tohoto maticového násobení je matice transformace, která se uplatní při skládání transformací jako první. To říká následující věta:

Věta 5. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V a nechť $T_1 : V \to V$ a $T_2 : V \to V$ jsou lineární transformace reprezentované maticemi $\boldsymbol{A}_1$ a $\boldsymbol{A}_2$ vzhledem k B. Pak složená transformace $T_2 \circ T_1$ s vlastností $(T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{u}) = T_2(T_1(\boldsymbol{u}))$ má matici $\boldsymbol{A}_2\, \boldsymbol{A}_1$ vzhledem k B.

Důkaz: Rovnost $\big(T_1(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T_1(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{A}_1$ platí z předpokladu, že $\boldsymbol{A}_1$ je matice transformace T_1. Na obě strany této rovnosti aplikujeme transformaci T_2 a dostáváme:

$$\begin{aligned}\big(T_2(T_1(\boldsymbol{b}_1)), \ldots, T_2\big(T_1(\boldsymbol{b}_n)\big)\big) &= T_2\big((\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{A}_1\big) = \big(T_2(\boldsymbol{b}_1), \ldots, T_2(\boldsymbol{b}_n)\big)\, \boldsymbol{A}_1 = \\ &= \big((\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{A}_2\big)\, \boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\, (\boldsymbol{A}_2\, \boldsymbol{A}_1)\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z toho, že T_2 převádí lineární kombinace vzorů na lineární kombinace obrazů se stejnými koeficienty a dále je použita definiční rovnost (4) pro matici $\boldsymbol{A}_2$. Konečně využijeme asociativitu násobení matic. Vidíme tedy, že $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ je maticí složené transformace $T_2 \circ T_1$ vzhledem k bázi B. ∎

Důsledkem této věty je tvrzení o inverzní transformaci: Je-li transformace T prostá, pak k ní existuje transformace inverzní T^{-1}. Má-li T matici $\boldsymbol{A}$ vzhledem k bázi B, pak T^{-1} má matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ vzhledem k bázi B. Je to zřejmé, protože $T \circ T^{-1} = I$ (identické zobrazení) a také $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ je matice identického zobrazení:

$$(I(\boldsymbol{b}_1), \ldots, I(\boldsymbol{b}_n)) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{E}.$$

Tvrzení o matici inverzní transformace můžeme zdůvodnit i za použití věty 4, což přenecháme čtenáři jako cvičení.

Poznámka: V návaznosti na poznámku na konci sekce 1.1 si představme lineární prostor V jako prostor geometrických vektorů. Lineární transformace nad takovým prostorem V jsou rotace kolem počátku, souměrnost podle osy nebo roviny procházející počátkem, změna měřítka, zkosení, kolmé projekce a další transformace vzniklé skládáním uvedených operací. Všechny tyto transformace lze reprezentovat maticí a na úrovni souřadnic vektorů (bodů) pak pracovat s maticovým násobením místo s pravítkem a kružítkem.

Příklad: Ukázat matice rotace, osové souměrnosti, změny měřítka geometricky i maticově. Ukázat skládání transformací. Zmínit že toto skládání nemusí být komutativní...

Uvedeme, jak se změní matice $\boldsymbol{A}$ transformace T vzhledem k bázi B v okamžiku, kdy přejdeme k nové bázi C. To říká následující věta:

Věta 6. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V. Nechť $\boldsymbol{P}$ je matice přechodu báze C vzhledem k B a nechť je dále dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Transformace $T : V \to V$, která je dána svou maticí $\boldsymbol{A}$ vzhledem bázi B má vzhledem k bázi C matici $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

Důkaz: Ukážeme pro zpestření v důkazu jiný postup než přímé použití definičních vzorců (3) a (4): ověříme vlastnost, kterou matice $\boldsymbol{A}'$ musí splňovat dle věty 4, tedy že pokud libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ má souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi C, pak $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice vektoru $T(\boldsymbol{u})$ vzhledem k bázi C. Nechť tedy $\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice $\boldsymbol{u}$ vzhledem k C. Pak $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice $\boldsymbol{u}$ vzhledem k B, dále $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice vektoru $T(\boldsymbol{u})$ vzhledem k B a konečně $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice vektoru $T(\boldsymbol{u})$ vzhledem k C. Protože vlastnost věty 4 určuje matici jednoznačně, je věta dokázána. ∎

K matici $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ lze dospět řádkovými úpravami GEM takto: $(\boldsymbol{P} \,|\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \sim (\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$.

1.5 Matice lineárního zobrazení

Maticí lze reprezentovat také obecné lineární zobrazení, které překračuje hranice jednoho lineárního prostoru, tedy lineární zobrazení $A : U \to V$, kde U a V jsou lineární prostory třeba i různých (ale konečných) dimenzí. Abychom toto mohli podchytit maticí, musíme si sestrojit báze v obou těchto lineárních prostorech.

Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze lineárního prostoru U a $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ je báze lineárního prostoru V. Nechť dále $A : U \to V$ je lineární zobrazení. Pak matici souboru vektorů $(A(\boldsymbol{b}_1), \dots, A(\boldsymbol{b}_n))$ vzhledem k bázi C, tedy matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ splňující:

$$(A(\boldsymbol{b}_1), \dots, A(\boldsymbol{b}_n)) = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\,\boldsymbol{A} \tag{5}$$

nazveme **maticí lineárního zobrazení** A **vzhledem k bázím** B **a** C.

Povšimněme si, že pokud vezmeme lineární zobrazení do stejného lineárního prostoru (tedy lineární transformaci) a volíme $B = C$, pak matice takového lineárního zobrazení vzhledem k bázím B a B je totéž jako matice transformace vzhledem k bázi B, která byla zavedena v předchozí sekci. Takže nový pojem zavedený v této sekci je jen mírným zobecněním už dříve zavedeného pojmu. Nepřekvapí nás tedy, že se argumenty budou opakovat, jen se nám do toho nyní bude plést jedna báze navíc.

Z uvedené definice a ze vzorce (5) přímo plyne, že $\dim U = n$ a $\dim V = m$, matice $\boldsymbol{A}$ má m řádků a n sloupců, tedy je z $\mathbb{R}^{m,n}$. Dále ze vzorce (5) plyne, že i-tý sloupec matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje souřadnice vektoru $A(\boldsymbol{b}_i)$ vzhledem k bázi C.

Je dobré si uvědomit, že při pevně stanovených bázích B a C:

(i) lineární zobrazení A určuje matici $\boldsymbol{A}$ dle (5) jednoznačně a obráceně
(ii) matice $\boldsymbol{A}$ z $\mathbb{R}^{m,n}$ určuje také jednoznačně lineární zobrazení $A : U \to V$ splňující (5).

Proč platí (i): Zobrazení A určí jednoznačně soubor vektorů na levé straně rovnosti (5) a tato rovnost určuje jednoznačně matici $\boldsymbol{A}$, jak bylo zdůvodněno pod rovností (2). Proč platí (ii): Báze C a matice $\boldsymbol{A}$ při použití maticového násobení na pravé straně rovnosti (5) vygeneruje soubor vektorů, které mají být dle (5) obrazy bázových prvků $\boldsymbol{b}_i$ v hledaném lineárním zobrazení A. A dále z věty o lineárním zobrazení víme, že lineární zobrazení je určeno svými obrazy na bázi jednoznačně.

Věta 4 má v případě obecného lineárního zobrazení toto zobecnění:

Věta 7. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze vektorového prostoru U, $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ je báze vektorového prostoru V, a nechť $A : U \to V$ je lineární zobrazení s maticí $\boldsymbol{A}$ vzhledem k B a C. Nechť vektor $\boldsymbol{u} \in U$ má souřadnice $\boldsymbol{x}$ v bázi B. Pak vektor $T(\boldsymbol{u})$ má souřadnice $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ v bázi C.

Důkaz: Zapíšeme předpoklad věty, tedy $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{x}$. Na obě strany této rovnosti uplatníme lineární zobrazení A a dostáváme:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u}) &= A\big((\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{x}\big) \overset{:1:}{=} \big(A(\boldsymbol{b}_1), \dots, A(\boldsymbol{b}_n)\big)\,\boldsymbol{x} \overset{:2:}{=} \big((\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\,\boldsymbol{A}\big)\,\boldsymbol{x} = \\ &= (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

Rovnost označená :1: platí z toho důvodu, že A je lineární, tj. přenáší lineární kombinace vzorů na lineární kombinace obrazů se stejnými koeficienty. Rovnost označená :2: plyne z (5) a dále je užit asociativní zákon maticového násobení. Vidíme tedy, že $\boldsymbol{y}$ obsahuje souřadnice vektoru $A(\boldsymbol{u})$ vzhledem k bázi C. ■

Skládání lineárních zobrazení lze realizovat maticovým násobením odpovídajících matic těchto zobrazení tak, že nejvíce vpravo v rámci tohoto maticového násobení je matice zobrazení, která se uplatní při skládání zobrazení jako první. To je zobecnění věty 5 pro obecné lineární zobrazení. Přesné znění tohoto zobecnění je bohužel poněkud komplikovanější, protože ve všech zúčastněných vektorových prostorech musíme nejprve zvolit nějakou bázi:

Věta 8. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze vektorového prostoru U, $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ je báze vektorového prostoru V, $D = (\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_k)$ je báze vektorového prostoru W. Nechť dále $A_1 : U \to V$ a $A_2 : V \to W$ jsou lineární zobrazení, A_1 má matici $\boldsymbol{A}_1$ vzhledem k bázím B a C, A_2 má matici $\boldsymbol{A}_2$ vzhledem k bázím C a D. Pak složené lineární zobrazení $A_2 \circ A_1$ s vlastností $(A_2 \circ A_1)(\boldsymbol{u}) = A_2(A_1(\boldsymbol{u}))$ má matici $\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{A}_1$ vzhledem k bázím B a D.

Důkaz: Rovnost $\big(A_1(\boldsymbol{b}_1), \dots, A_1(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\,\boldsymbol{A}_1$ vyplývá z toho, že $\boldsymbol{A}_1$ je maticí lineárního zobrazení A_1 vzhledem k bázím B a C. Na obě strany této rovnosti aplikujeme zobrazení A_2 a dostáváme:

$$\begin{aligned} \big(A_2(A_1(\boldsymbol{b}_1)), \dots, A_2\big(A_1(\boldsymbol{b}_n)\big)\big) &\overset{:1:}{=} A_2\big((\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\,\boldsymbol{A}_1\big) = \big(A_2(\boldsymbol{c}_1), \dots, A_2(\boldsymbol{c}_m)\big)\,\boldsymbol{A}_1 = \\ &= \big((\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_k)\,\boldsymbol{A}_2\big)\,\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_k)\,(\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{A}_1). \end{aligned}$$

Rovnost označená :1: plyne z toho, že A_2 převádí lineární kombinace vzorů na lineární kombinace obrazů se stejnými koeficienty a dále je použita definiční rovnost (5) pro matici $\boldsymbol{A}_2$ zobrazení A_2 vzhledem k bázím C a D. Konečně využijeme asociativitu násobení matic. Vidíme tedy, že $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ je maticí složeného lineárního zobrazení $A_2 \circ A_1$ vzhledem k bázi B. ∎

Poznámka: Předpokládejme, že v $\mathbb{R}^n$ máme standardní bázi, jejíž sloupce tvoří jednotkovou matici $\boldsymbol{E}_n$ a nechť v $\mathbb{R}^m$ máme obdobnou standardní bázi, ze které jsme vytvořili jednotkovou matici $\boldsymbol{E}_m$. Dále je dána matice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m,n}$ a lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ určené předpisem $A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$. Pak definiční vzorec (5) pro matici $\boldsymbol{A}$ tohoto lineárního zobrazení vzhledem k bázím $\boldsymbol{E}_n$ a $\boldsymbol{E}_m$ má tvar $\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}$, takže vidíme, že matice $\boldsymbol{A}$ takového zobrazení vzhledem ke standardním bázím je rovna přímo matici, která to zobrazení na úrovni složek vektorů realizuje.

Příklad: Je dáno lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ předpisem $A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Máme najít matici $\boldsymbol{A}$ tohoto lineárního zobrazení vzhledem k nějakým obskurním bázím $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$. Dané báze sestavíme do sloupců matic $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$. Definiční rovnost (5) pro matici daného zobrazení pak přechází na $\boldsymbol{M}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, z čehož plyne, že $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. K tomuto výsledku můžeme též dojít řádkovou eliminací $(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}) \sim (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B})$.

Na matici $\boldsymbol{B}$ se můžeme dívat jako na matici přechodu báze B vzhledem ke standardní bázi, protože úhlem pohledu vzorce (3) platí $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}$. Podobně matice $\boldsymbol{C}$ je maticí přechodu báze C vzhledem ke standardní bázi. Konečně předchozí poznámka říká, že matice $\boldsymbol{M}$ je maticí zobrazení A vzhledem ke standardním bázím. Na výsledek našeho příkladu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}$ je tedy možné pohlížet jako na matici $\boldsymbol{M}$ zobrazení A vzhledem ke standardním bázím násobenou zleva a zprava příslušnými maticemi přechodu.

Poznámka: Uvažujme nyní identické lineární zobrazení $I : U \to U$ vektorového prostoru U se dvěma bázemi $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Pak definiční vzorec (5) pro matici $\boldsymbol{A}$ této identity vzhledem k bázím B a C přechází na tvar

$$\big(I(\boldsymbol{b}_1), \ldots, I(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)\,\boldsymbol{A},$$

takže vidíme že matice $\boldsymbol{A}$ je zároveň maticí přechodu báze B vzhledem k bázi C, tedy převádí maticovým násobením $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ souřadnice vzhledem k B na souřadnice vzhledem k C. Z předchozího textu víme, že je to také matice takové transformace $T : U \to U$, která zobrazuje prvky $\boldsymbol{c}_i$ na prvky $\boldsymbol{b}_i$.

Poznámka: Pro zapamatování všech vlastností odpovídajících matic přechodu, matic transformací a matic zobrazení si stačí zapamatovat definiční vzorce (3), (4) a (5), které jsou navíc jen mírnou variací obecného vzorce (2). Z uvedených vzorců ostatní vlastnosti matic přímočaře plynou, jak jsme ukázali v tomto textu. Také lze z nich přímočaře odvodit požadovanou činnost, kterou musíme při hledání odpovídající matice udělat, což jsme ukázali v posledním příkladě. K zapamatování vzorců (3) a (5) navíc slouží mnemotechnická pomůcka, že je třeba vyslovit příslušné báze v názvu matice v takovém pořadí, v jakém je vidíme ve vzorcích zleva doprava napsány. V případě (3) to je také pořadí výchozí a cílové báze v rámci přechodu souřadnic realizovaného maticovým násobením $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Příklad: Najdeme matici $\boldsymbol{A}$ zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vzhledem ke standardním bázím, když známe hodnoty tohoto zobrazení pouze na nějaké (nestandardní) bázi. Je tedy dána báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i)$ a známe hodnoty $\boldsymbol{y}_i = A(\boldsymbol{b}_n)$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Víme dle věty o lineárních zobrazeních, že lineární zobrazení je těmito podmínkami určeno jednoznačně a hledáme matici $\boldsymbol{A}$ tohoto zobrazení vzhledem ke standardním bázím. Protože hledaná matice $\boldsymbol{A}$ je také maticí, která přímo realizuje obraz $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ maticovým násobením $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$, platí také pro dané vektory $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}_i$. Můžeme tedy sestavit matici $\boldsymbol{Y}$ se sloupci $\boldsymbol{y}_i$ a matici $\boldsymbol{B}$ se sloupci $\boldsymbol{b}_i$ a psát $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. Matice $\boldsymbol{B}$ je regulární, protože to je matice báze B vzhledem ke standardní bázi. Vynásobením uvedené rovnosti maticí $\boldsymbol{B}^{-1}$ zprava dostáváme výsledek $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Pokud bychom k tomu výsledku chtěli dojít efektivně pomocí eliminačních úprav, musely by to být sloupcové, nikoli řádkové, úpravy. Na to nejsme zvyklí, proto přejdeme k transponovaným maticím, o kterých platí: $\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}^{-1})^T\boldsymbol{Y}^T = (\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{Y}^T$, takže víme, že matici $\boldsymbol{A}^T$ získáme řádkovými eliminačními úpravami $(\boldsymbol{B}^T \mid \boldsymbol{Y}^T) \sim (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^T)$. Můžeme to lapidárně shrnout takto: sestavíme-li matici $\boldsymbol{U}$, která má *v řádcích* vektory báze $\boldsymbol{b}_i$ a dále matici $\boldsymbol{V}$, která má v řádcích obrazy této báze při zobrazení A a provedeme řádkovou eliminaci $(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{V}) \sim (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{W})$. Pak $\boldsymbol{W}^T$ je hlednaná matice $\boldsymbol{A}$.