Ukázka písemné části zkoušky z předmětu BI-LIN (rok 2009/2010)

.... **Část A** .... (20 bodů)

1. Je dána skupina pěti vektorů v nějakém lineárním prostoru L. Víme, že žádný vektor není násobkem jiného. Na základě této informace můžeme říci, že:

a) pokud v této skupině vektorů není nulový vektor, je lineárně nezávislá.
b) daná skupina vektorů je lineárně závislá.
c) daná skupina vektorů je lineárně nezávislá.
d) daná skupina vektorů může být lineárně závislá i nezávislá.
e) daná skupina vektorů je lineárně nezávislá jen tehdy, když každý vektor obsahuje alespoň pět složek.

2. Známe hodnoty lineárního zobrazení z L_1 do L_2 na bázi B lineárního prostou L_1. Z toho plyne, že:

a) je možné spočítat jádro zobrazení, ale mimo jádro nejsou hodnoty zobrazení jednoznačně určeny.
b) hodnoty lineárního zobrazení jsou jednoznačně určeny pro celý definiční obor L_1.
c) máme málo informací, abychom spočítali hodnotu zobrazení v libovolném bodě L_1.
d) hodnoty zobrazení jsou na L_1 jednoznačně určeny jen v případě, že zobrazení je izomorfismus.
e) pokud zobrazení není prosté, nejsou jeho hodnoty na celém L_1 jednoznačně určeny.

3. Vyřeším homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí A a bázi prostoru řešení zapíšu do řádků matice B. Dále řeším soustavu $Bx = 0$ a bázi prostoru řešení zapíši do řádků matice C. Jaký je vztah mezi řádky matice A, B a C?

a) Počet řádků matice C je větší než počet řádků matice A.
b) Řádky matice C jsou lineárními kombinacemi řádků matice A, ale může se stát, že nějaký řádek matice A není lineární kombinací řádků matice C.
c) Řádky matice B jsou lineární kombinací řádků matice A nebo řádků matice C.
d) Lineární obal řádků matice A je roven lineárnímu obalu řádků matice C.
e) Žádné z výše uvedených tvrzení obecně neplatí.

4. Skupina polynomů (označme ji M) tvoří bázi lineárního prostoru P všech polynomů nejvýše pátého stupně. Pak pro polynomy z M platí:

a) Je jich šest, jsou lineárně nezávislé a mají stupeň nejvýše pět.
b) Je jich pět, jsou lineárně nezávislé a mají stupeň nejvýše pět.
c) Počet polynomů v M je roven $\dim P$, alespoň jeden polynom z M má stupeň pět a lze jej vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních polynomů z M.
d) Polynomy nemohou tvořit bázi žádného lineárního prostoru.
e) Nic z předchozího neplatí, protože množina P netvoří lineární prostor.

.... **Část B** .... (20 bodů)

1. Definujte *jádro lineárního zobrazení* a *podprostor*. Zdůvodněte, proč jádro lineárního zobrazení tvoří lineární podprostor.

2. Vysvětlete, k čemu slouží kontrolní a generující matice a uveďte, jaký je mezi těmito maticemi vztah. Jak spočítáme na základě generující matice kontrolní matici?

.... **Část C** .... (20 bodů)

1. Soustava lineárních rovnic má rozšířenou matici:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} p & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

V závislosti na parametru $p \in \mathbf{R}$ najděte všechna řešení této soustavy.

2. Nechť $(O, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ je ortonormální souřadnicový systém euklidovského prostoru $(\mathbf{X}, V)$. V prostoru $\mathbf{X}$ je dána přímka $p = \{O + 3\vec{b}_1 + t\,\vec{b}_2;\ t \in \mathbf{R}\}$. Dále označme symbolem T_p osovou souměrnost podle p. Najděte matici transformace $T_p : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ v homogenních souřadnicích vzhledem k souřadnicovému systému $(O, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

K části A: odevzdejte jen tabulku s čísly příkladů a písmeny značících správnou odpověď. Každá otázka má jedinou správnou odpověď. Za správnou odpověď máte +5 bodů, za nesprávnou −2 body a za nevyplněnou odpověď 0 bodů. Je-li celkový součet bodů v části A záporný, upraví se na 0 bodů.
K části B: zformulujte všechny definice, na které se v otázce ptají a za použití těchto definic argumentujte při odpovědi na další části otázky.
K části C: zapište celý postup výpočtu a vyznačte přehledně konečný výsledek.