Otázky ke zkoušce „Úvod do algebry“

10. 1. 1999, Petr Olšák

Poznámka. V písemné části zkoušky budou dvě teoretické otázky. Je tedy málo pravděpodobné, že nutný poloviční počet bodů získáte jen počítáním příkladů. Doporučuji podívat se i na teoretické otázky a pečlivě se na ně připravit. V tomto přehledu uvádím skupinu otázek a problémů, které se především objeví v teoretické části. Z důvodu stručnosti jsou zde formulovány problémy mnohdy nepřesně, ale na písemce i v ústní části to napravíme. Tam bude zadání obsahovat všechy vstupní předpoklady odpovídající vybranému problému.

Polynomy, jednoznačnost částečného podílu polynomů. Hornerovo schéma, poslední řádek Hornerova schématu pro polynom P a hodnotu c obsahuje koeficienty polynomu R, kde $P(x) = (x-c)\,R(x) + P(c)$, proč? Proč jsou komplexní kořeny polynomů s reálnými koeficienty komplexně sdružené? Je-li c/d kořen polynomu s celočíselnými koeficienty, proč c dělí absolutní člen?

Rozklad racionální funkce na parciální zlomky, popis algoritmu.

Lineární závislost/nezávislost (LZ/LN) aritmetických vektorů. Proč $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jsou LZ právě tehdy, když existuje a_i, které je lineární kombinací ostatních? Přidám-li k LZ množině vektor, zůstává LZ; uberu-li z LN množiny vektor, zůstává LN, proč? Proč předchozí tvrzení neplatí po záměně znaků LZ$\leftrightarrow$LN? Dokažte z definice, že dva vektory jsou LZ právě tehdy, když jeden je násobkem druhého.

Hodnost matice. Proč prohození řádků a vynásobení řádku nenulovou konstantou nemění hodnost matice? Na sčítání řádků se raději ptát nebudu. Popište Gaussovu eliminační metodu. Operace s maticemi. Definujte součin matic. Jakého typu musí být matice A, B, C, aby bylo definováno $A \cdot (B \cdot C)$? Dokažte, že platí $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. Proč při násobení (ani čtvercových) matic neplatí komutativní zákon?

Determinant matice. Odvoďte z definice Sarrusovo pravidlo. Dokažte z definice jednoduché věty o determinantech: jak se změní determinant matice při prohození řádků, vynásobení řádku konstantou, sečtení řádků. Věta o rozvoji determinantu podle řádku (bez důkazu), Lapaceova věta (bez důkazu).

Inverzní matice. Dokažte jednoznačnost a pro regulární matice existenci inverzní matice. Proč pro singulární matice inverzní matice neexistuje? Nechť A je regulární a E jednotková; dokažte, že $(A|E) \sim (E|A^{-1})$, kde „$\sim$“ představuje konečně mnoho řádkových úprav z Gaussovy eliminační metody. Lze v průběhu eliminace při výpočtu inverzní matice střídat řádkové a sloupcové úpravy? Proč?

Formulujte Frobeniovu větu a dokažte ji. Proč množina řešení homogenní soustavy lin. rovnic tvoří lin. podprostor? Jak souvisí dimenze prostoru řešení homogenní soustavy s hodností matice soustavy a s počtem proměnných? Zdůvodněte. Proč stačí k vyjádření všech řešení soustavy lin. rovnic znát jediné partikulární řešení a prostor řešení přidružené homogenní soustavy? Nechť máme dvě různá partikulární řešení a dvě různé báze prostoru řešení přidružené homogenní soustavy; jak poznáme, že popisují stejnou množinu řešení?

Lineární prostor. Zdůvodněte z definice základní vlastnosti: $x + o = x, \forall x \in L$, $\alpha o = o, \forall \alpha \in L$. Ověřte z definice, že množina spojitých funkcí, polynomů, komplexních čísel, atd. s běžně definovanými operacemi tvoří lineární prostor. LZ/LN podmnožin lin. prostoru (i nekonečných). Příklady LZ a LN množin funkcí. Lineární obal. Proč $\langle M \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$? Lineární podprostor (LPP). Ukažte z definice LPP, že množina všech polynomů nebo všech polynomů nejvýše n-tého stupně je LPP prostoru všech funkcí na $\mathbf{R}$. Proč množina polynomů právě n-tého stupně není LPP? Proč množina singulárních matic $(n \times n)$ není LPP prostoru všech matic typu $(n \times n)$? M je LPP nějakého lin. prostoru právě tehdy, když $\langle M \rangle = M$, dokažte.

Báze lineárního (pod)prostoru. Ukažte, že každé dvě konečné báze stejného lin. prostoru mají stejný počet prvků. Dimenze (pod)prostoru. Ukažte, že pro M LPP prostoru L je $\dim M \le \dim L$. Nechť M je LPP lin. prostoru L a $\dim M = \dim L$ jsou konečné; pak $L = M$, dokažte. Ukažte, proč předchozí tvrzení neplatí pro nekonečnou dimenzi. Nechť M, N jsou LPP; ukažte, že $M \cup N$ nemusí být LPP, ale $M \cap N$ je LPP. Souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi, jednoduché příklady. Matice přechodu a její vlastnosti. Dokažte vzorec pro transformaci souřadnic od jedné báze k druhé prostřednictvím matice přechodu. Není zde důležitá přesně stejná terminologie, jako byla použita na přednášce, ale je potřeba prokázat pochopení problematiky. Proč je matice přechodu vždy regulární?

Lineární zobrazení. Ukažte, že princip superpozice je nutná a postačující podmínka linearity zobrazení. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{def}\mathcal{A}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{A}(f) = f'$ na lin. prostoru diferencovatelných funcí; jak vypadá $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{def}\mathcal{A}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A}$? Další jednoduché příklady. Nechť je dáno zobrazení $\mathcal{B}$: báze $L_1 \to L_2$, pak existuje jediné lineární zobrazení $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$, které má na bázi L_1 stejné hodnoty jako $\mathcal{B}$. Dokažte existenci i jednoznačnost. Proč lin. zobrazení zobrazuje vždy LZ množinu z L_1 do LZ množiny v L_2, ale nemusí zobrazit LN množinu do LN množiny? Matice A zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem ke konečným bázím B a C. Dokažte vzorec pro transformaci souřadnic vzoru na souřadnice obrazu $\mathcal{A}$ pomocí matice přechodu A. Dokažte, že $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod} A$. Dokažte, že $\dim L_1 = \operatorname{def}\mathcal{A} + \operatorname{hod}\mathcal{A}$.

Skalární součin. Definici nemusíte znát podle přednášky (tam zazněla definice i pro nekonečnou dimenzi), ale stačí podle skript (dimenze 3 a předpoklad možnosti změřit úhel mezi vektory). Nicméně, definice podle přednášky je vítána. Vlastnosti skalárního součinu. Velikost vektoru, úhel mezi vektory. Proč platí trojúhelníková nerovnost. Dokažte Pythagorovu větu formulovanou pro lin. prostor se skalárním součinem. Ortogonální, ortonormální báze. Dokažte vzorec pro výpočet skalárního součinu ze souřadnic vektorů vzhledem k ortonormální bázi. Orientace báze. Pokud B a C jsou souhlasně orientovány a C, D rovněž, pak též B a D jsou souhlasně orientovány, proč?

Bodový prostor a prostor volných vektorů, kartézský souřadný systém, přímka, rovina, charakteristika vzájemných poloh dvou přímek, přímky a roviny a dvou rovin. Odvození vzorce pro plochu rovnoběžníka, objem rovnoběžnostěnu, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost mimoběžek, rovnoběžných přímek a rovin, úhlu mezi různoběžkami a mezi dvěma rovinami.

Kromě dvou teoretických příkladů budou v písemné části tři příklady na počítání z těchto oblastí: determinanty, soustavy lineárních rovnic (především s parametrem), operace s maticemi, příklady na analytickou geometrii v rozsahu témat uvedených v předchozím odstavci. Všech pět příkladů bude hodnoceno stejným počtem bodů.