Lineární zobrazení

- Zachovává operace + a $\cdot$ lineárního postoru.
- Přenáší vztahy mezi vektory jednoho prostoru do druhého.

a) zobrazeni, 5, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Zobrazení (zatím ne nutně lineární)

- přiřazuje každému prvku x jedné množiny (L_1) jednoznačně prvek y množiny druhé (L_2). Značíme $A : L_1 \to L_2$.
- prvku x zobrazení A přiřadí prvek y, který nazýváme *hodnota zobrazení v bodě* x nebo *obraz prvku* x a značíme jej $A(x)$. Mluvíme-li o obrazu prvku x, pak prvek x nazýváme *vzor*.
- množině $M \subseteq L_1$ zobrazení A přiřadí množinu hodnot $A(M)$.
- zobrazení je *prosté* (injektivní), pokud každým dvěma různým vzorům přiřadí různé obrazy.
- zobrazení je *na* L_2 (surjektivní), pokud každý prvek v L_2 má svůj vzor.
- zobrazení je *bijektivní*, je-li prosté a na.

Definice lineárního zobrazení

Zobrazení $A : L_1 \to L_2$ *je lineární* (homomorfismus), pokud jsou L_1 a L_2 lineární prostory a pokud zobrazení „zachovává operace", tj. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L_1$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ je:

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A(\overrightarrow{x}) + A(\overrightarrow{y}), \qquad A(\alpha \cdot \overrightarrow{x}) = \alpha \cdot A(\overrightarrow{x}).$$

Operace $+$, $\cdot$ vlevo obou rovností jsou operacemi v L_1 a operace $+$, $\cdot$ vpravo jsou operacemi v L_2.

Příklady: Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax$, dále zobrazení, které přiřadí diferencovatelné funkci derivaci, integrovatelné funkci určitý integrál, funkci posloupnost $f(1), f(2), \ldots$, posloupnosti po částech konstantní funkci, orientované úsečce její průmět do roviny, vektoru souřadnice, …

Zajímavý příklad: $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ (operace na $\mathbf{R}^+$ jsou $x \oplus y = xy$, $\alpha \odot x = x^\alpha$, operace na $\mathbf{R}$ jsou „obvyklé"), $f(x) = \ln(x)$.

Princip superpozice

Lineární zobrazení $A : L_1 \to L_2$ převádí lineární kombinace vzorů v L_1 na lineární kombinace obrazů v L_2 se stejnými koeficienty, tedy:

$$A(\alpha_1 \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{x}_2 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{x}_n) = \alpha_1 A(\overrightarrow{x}_1) + \alpha_2 A(\overrightarrow{x}_2) + \cdots + \alpha_n A(\overrightarrow{x}_n)$$

Zachování obalů

Důsledek principu superpozice je: $A(\langle M\rangle) = \langle A(M)\rangle$, neboli:

- Je-li P lineární podprostor v L_1, je $A(P)$ lineární podprostor v L_2.
- $A(L_1)$ je lineární podprostor v L_2.

Jádro lineárního zobrazení

Definice: *Jádro* lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je podmnožina $\mathrm{Ker}\, A \subseteq L_1$ definovaná vztahem

$$\mathrm{Ker}\, A = \{ \vec{x} \in L_1,\ A(\vec{x}) = \vec{o} \},$$

tj. je to množina vzorů, které mají nulový obraz.

Věta: Jádro lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je lineární podprostor v L_1.

Důkaz: nechť $A(\vec{x}) = \vec{o}$, $A(\vec{y}) = \vec{o}$. Pak $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}) = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$. Dále $A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x}) = \alpha \vec{o} = \vec{o}$.

Cvičení: Najděte jádra dříve zmíněných příkladů lin. zobrazení.

Defekt a hodnost lineárního zobrazení

Definice: *Defekt* lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je $\dim \mathrm{Ker} A$. *Hodnost* lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je $\dim A(L_1)$.

Lapidárně: Defekt určuje, kolik dimenzí se „ztratí“ při přechodu od vzorů k obrazům. Hodnost je dimenze podprostoru všech obrazů.

Cvičení: Najděte defekty a hodnosti dříve zmíněných příkladů lin. zobrazení.

Příklad $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$

Zobrazení A je v bodě $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ definováno hodnotou:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4,\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4,\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4)$$

Toto zobrazení je zjevně lineární. Najdeme jeho jádro, defekt a hodnost.

Defekt plus hodnost

Věta: Defekt plus hodnost lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je rovno dimezni L_1.

Důkaz (jen náčtr, podrobně viz linal2.pdf)

Prosté lineární zobrazení

Věta: Lineární zobrazení je prosté právě když má nulový defekt.

Důkaz: Nemá-li nulový defek, zjevně není prosté. Má-li nulový defekt a není prosté, odvodíme spor. $A(\overrightarrow{x}) = A(\overrightarrow{y})$, tj. $A(\overrightarrow{x}) - A(\overrightarrow{y}) = A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{o}$, takže v jádru leží $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{o}$, takže A nemá nulový defekt.

Věta: Lineární zobrazení je prosté právě když lineárně nezávislé vzory převede na lineárně nezávislé obrazy.

Důkaz: Není-li prosté, pak má nenulový defekt a netriviální jádro. Existuje tedy nenulový vektor (lin. nezávislý), který se zobrazí na nulový vektor (lin závislý).

Je-li prosté a obrazy nezávislých vzorů jsou lin. závislé, pak dostaneme spor s principem superpozice (ukázat podrobněji...).

Zobrazení lineárně závislých vzorů

vytvoří vždy lin. závislý obraz. Stačí použít princip superpozice.

Izomorfismus

Zobrazení $A : L_1 \to L_2$, které je lineární, prosté a na L_2 se nazývá *izomorfismus*.

Pozorování: Izomorfismus převádí:

- LN množiny na LN množiny (protože je prostý a lineární),
- lin. kombinace na lin. kombinace obrazů (protože je lineární),
- LZ množiny na LZ (protože je lineární),
- podprostory na podprostory (protože je lineární),
- lineární obaly na lineární obaly (protože je lineární),
- báze na báze (protože převádí LN množiny na LN množiny),

Izomorfismus zachovává dimenze převedených podprostorů a zaručí, že $\dim L_1 = \dim L_2$ (protože je lineární prostý a na).

Vlastnosti izomorfismů

- Složení izomorfisu je izomorfismus
- Inverze k izomorfismu existuje a je to izomorfismus

Zobrazení souřadnic je izomorfismus

Je třeba ověřit

- linearitu,
- zda je toto zobrazení prosté
- zda je „na“ $\mathbf{R}^n$.

Izomorfní lin. prostory konečné dimenze

Definice: Dva lineární prostory L_1 a L_2 jsou *izomorfní*, existuje-li izomorfismus $A : L_1 \to L_2$.

Pozorování: Každý lineární prostor L konečné dimenze n je izomorfní s $\mathbf{R}^n$. Tím izomorfismem jsou souřadnice vzhledem k bázi.

Věta: Každé dva lineární prostory stejné konečné dimenze jsou vzájemně izomorfní. (Důkaz plyne z vlastností izomorfismu.)

Důležité: Z pohledu lineární algebry (vlastností vzešlých z axiomů linearity) není mezi dvěma izomorfními lineárními prostory žádný rozdíl. Můžeme si vybrat, ve kterém z těchto dvou lineárních prostorů budeme algebraický problém řešit. Obvykle se problém řeší v $\mathbf{R}^n$, kde můžeme využít algoritmy související s maticemi.