


Změna báze

- matice přechodu od báze k bázi
- jak se změní souřadnice vektoru při změně báze?
- jak se změní matice lineárního zobrazení při změně báze?
- jak se změní matice transformace při změně báze?

a) zmenabase, 12, b) P. Olsák, FEL ČVUT, c) P. Olsák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g)  Viz p. d. 4/2010

Matice přechodu

Definice: Necht' $(B) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ a $(C) = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$ jsou dvě báze stejného lineárního prostoru L . Pak existuje jediná lineární transformace $A : L \rightarrow L$, pro kterou je

$$A(\vec{b}_i) = \vec{c}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Matice této lineární transformace vzhledem k bázi (B) se nazývá *matice přechodu od báze (B) k bázi (C)* .

- Značení: $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ je matice přechodu od (B) k (C) .

BI-LIN, zmenabase, 12, P. Olsák [3]

Vlastnosti matice přechodu

- $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ má v i -tém sloupci souřadnice vektoru \vec{c}_i vzhledem k bázi (B) .
- $(\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_n) = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n) \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow C}$,
- $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ je matice identity vzhledem k bázím (C) a (B)
- Pro každý vektor $\vec{u} \in L$ je

$$\mathbf{P}_{B \rightarrow C} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix}.$$

Pozor, je to opačně, než by odpovídalo názvu matice přechodu!

BI-LIN, zmenabase, 12, P. Olsák [4]

Matice přechodu je regulární

Platí:

- $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ je regulární.
- $\mathbf{P}_{B \rightarrow C} \cdot \mathbf{P}_{C \rightarrow D} = \mathbf{P}_{B \rightarrow D}$
- $(\mathbf{P}_{B \rightarrow C})^{-1} = \mathbf{P}_{C \rightarrow B}$

Důkaz: Protože má matice $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ lin. nezávislé sloupce, je regulární. Součin matic přechodu vyplývá z věty o matici složeného zobrazení. Je potřeba v tomto případě skládat identické zobrazení a jeho matice vzhledem k různým bázím. Konečně třetí puntík je důsledkem druhého.

Příklad

Jsou dány $(S) = (1, x, x^2)$ a $(C) = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$, dvě báze lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně. Najdeme matici přechodu $\mathbf{P}_{S \rightarrow C}$. Ta obsahuje ve sloupcích souřadnice báze \vec{c}_i vzhledem k bázi (S) , tedy

$$\mathbf{P}_{S \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jsou-li (α, β, γ) souřadnice polynomu p vzhledem k (C) , pak

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

jsou souřadnice téhož polynomu vzhledem k bázi (S) , neboli

$$p(x) = \alpha x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)x - \beta + 2\gamma.$$

Příklad

Jsou dány báze $(B) = (x^2 + 1, x^2 + 2, x + 3)$ a $(C) = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$ lineárního prostoru polynomů nejvýše druhého stupně. Najdeme matici přechodu $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$.

Zvolme bázi, vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají, například $(S) = (1, x, x^2)$. Podle algoritmu z předchozí stránky sestavíme $(\mathbf{P}_{S \rightarrow B} | \mathbf{P}_{S \rightarrow C})$ a eliminujeme na tvar $(\mathbf{E} | \mathbf{P}_{B \rightarrow C})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

V pravém bloku po eliminaci máme matici $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$. Známe-li souřadnice polynomu vzhledem k (C) , pak násobením maticí $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ získáme souřadnice polynomu vzhledem k (B) . Kdybychom potřebovali ze souřadnice vzhledem k (B) spočítat souřadnice vzhledem k (C) , použijeme inverzní matici $(\mathbf{P}_{B \rightarrow C})^{-1} = \mathbf{P}_{C \rightarrow B}$.

Algoritmus pro sestavení matice přechodu

- Matici přechodu $\mathbf{P}_{S \rightarrow B}$ od standardní báze (S) k bázi (B) sestavíme snadno: do sloupců zapíšeme souřadnice vektorů \vec{b}_i vzhledem k bázi (S) .
- Platí: $\mathbf{P}_{B \rightarrow C} = \mathbf{P}_{B \rightarrow S} \cdot \mathbf{P}_{S \rightarrow C} = (\mathbf{P}_{S \rightarrow B})^{-1} \cdot \mathbf{P}_{S \rightarrow C}$.
- Protože $(\mathbf{A} | \mathbf{B}) \sim (\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$, stačí napsat následující dvoublokovou matici a eliminovat:

$$(\mathbf{P}_{S \rightarrow B} | \mathbf{P}_{S \rightarrow C}) \sim (\mathbf{E} | \mathbf{P}_{S \rightarrow B}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{S \rightarrow C}) = (\mathbf{E} | \mathbf{P}_{B \rightarrow C}).$$

V pravém bloku po eliminaci najdeme hledanou matici $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$.

Změna matice zobrazení při změně báze

Nechť \mathbf{A} je matice zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k bázím (B) a (C) . Nechť \mathbf{A}' je matice téhož zobrazení, ovšem vzhledem k bázím (B') a (C') . Pak

$$\mathbf{P}_{C' \rightarrow C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow B'} = \mathbf{A}'$$

Náčrt důkazu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{C' \rightarrow C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow B'} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B') \end{pmatrix} &= \mathbf{P}_{C' \rightarrow C} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{P}_{C' \rightarrow C} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \vec{A}(u) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \vec{A}(u) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Důsledky věty o změně matice

Nechť \mathbf{A} je matice zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k bázím (B) a (C) . Pak

- $\mathbf{P}_{C \rightarrow C} \cdot \mathbf{A}$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C') .
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow B'}$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B') a (C) .

Nechť \mathbf{A} je matice transformace $A : L \rightarrow L$ vzhledem k bázi (B) . Pak

- $\mathbf{P}_{B' \rightarrow B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow B'}$ je matice transformace A vzhledem k bázi (B') , neboli:
- $(\mathbf{P}_{B \rightarrow B'})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow B'}$ je matice transformace A vzhledem k (B') .

Příklad

Nechť $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$. Najdeme matici této transformace ke standardní bázi (S) . Dále najdeme matici této transformace vzhledem k bázi $(B) = ((2, 2, 2), (3, 3, 0), (4, 0, 0))$.

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{A}_B transformace A vzhledem k bázi (B) spočítáme takto:

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{P}_{B \rightarrow S} \cdot \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{P}_{S \rightarrow B} = (\mathbf{P}_{S \rightarrow B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{P}_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmus: sestavení matice zobrazení vzhledem k libovolným bázím

Je dáno lineární zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$. Najdeme matici tohoto zobrazení vzhledem k bázím (B) a (C) .

Nechť (S) je báze L_2 , vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají. Sestavíme matici $(\mathbf{P}_{S \rightarrow C} | \mathbf{A}_{B,S})$, ve které $\mathbf{A}_{B,S}$ značí matici zobrazení A vzhledem k bázím (B) , (S) . Eliminujeme na tvar $(\mathbf{E} | \mathbf{X})$. Pak \mathbf{X} je hledaná matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C) .

Proč? Je $(\mathbf{P}_{S \rightarrow C} | \mathbf{A}_{B,S}) \sim (\mathbf{E} | \mathbf{P}_{C \rightarrow S} \cdot \mathbf{A}_{B,S})$.

Přitom $\mathbf{P}_{C \rightarrow S} \cdot \mathbf{A}_{B,S}$ je maticí zobrazení A vzhledem k (B) a (C) .

Poznámka: matice $\mathbf{P}_{S \rightarrow C}$ a $\mathbf{A}_{B,S}$ lze sestavit snadno.

Příklad

Je dáno zobrazení $A : P_3 \rightarrow P_2$, které derivuje polynomy nejvýše třetího stupně. Najdeme matici tohoto zobrazení vzhledem k:

$$(B) = (x^3 + x + 2, x^2 + 2x + 3, x^2 + 2, x - 1), \quad (C) = (x^2 - x + 1, x^2 - x - 1, x + 4)$$

Zvolím $(S) = (x^2, x, 1)$. To je báze, vzhledem ke které se souřadnice polynomů z P_2 dobře hledají. Je:

$$A(x^3 + x + 2) = 3x^2 + 1, \quad A(x^2 + 2x + 3) = 2x + 2, \quad A(x^2 + 2) = 2x, \quad A(x - 1) = 1$$

Sestavím matici $(\mathbf{P}_{S \rightarrow C} | \mathbf{A}_{B,S})$ a eliminuji:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{E} & & & -4 & -3 & -4 & \frac{1}{2} \\ & & & 7 & 3 & 4 & -\frac{1}{2} \\ & & & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Hledaná matice je v pravém bloku po eliminaci.

Příklad

Je dána matice \mathbf{A}' zobrazení vzhledem k bázím (B) a (S_2) . Hledáme matici \mathbf{A} zobrazení vzhledem k bázím (S_1) a (S_2) .

Jinými slovy: známe zobrazení A na bázi (B) a hledáme vzorec, který udává hodnotu tohoto zobrazení v libovolném bodě. Například je známo

$$A(1, 1, 2) = (1, 0, 1, 0), \quad A(1, 2, 2) = (2, 0, 2, 0), \quad A(2, 1, 5) = (1, 2, 2, 1).$$

Řešení. Podle strany [9] je $\mathbf{A} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow S_1} = \mathbf{A}' \cdot (\mathbf{P}_{S_1 \rightarrow B})^{-1}$. Matici přechodu $\mathbf{P}_{S_1 \rightarrow B}$ sestavíme snadno. Jde tedy o to ji invertovat a násobit zprava s danou maticí \mathbf{A}' .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad

Nechť $A : L \rightarrow L$ je lineární transformace, která zobrazí bázi (B) na bázi (C) . Víme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{B \rightarrow C}$ je rovna matici této transformace A vzhledem k bázi (B) . Jak vypadá matice stejné transformace vzhledem k bázi (C) ?

Řešení: Označme matici zobrazení A vzhledem k (B) symbolem \mathbf{A}_B a hledanou matici označme \mathbf{A}_C . Je $\mathbf{A}_B = \mathbf{P}_{B \rightarrow C}$. Podle důsledku ze strany [9] je

$$\mathbf{A}_C = (\mathbf{P}_{B \rightarrow C})^{-1} \cdot \mathbf{A}_B \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow C} = (\mathbf{P}_{B \rightarrow C})^{-1} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow C} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow C} = \mathbf{P}_{B \rightarrow C}$$

Ejhle, matice transformace A vzhledem k bázi (C) je *stejná*, jako matice této transformace vzhledem k bázi (B) a je to matice přechodu od (B) k (C) .

Příklad

Nechť osa o prochází počátkem a svírá s osou x úhel α . Najdeme matici osové soměrnosti podle osy o .

Zvolíme bázi (B) tak, aby vektor \vec{b}_1 ležel v ose o a \vec{b}_2 byl na ní kolmý. Vzhledem k této bázi je matice osové soměrnosti rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nyní provedeme přechod od báze (B) k bázi (S) . Matice osové soměrnosti vzhledem k (S) je

$$\mathbf{P}_{S \rightarrow B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_{B \rightarrow S},$$

$$\mathbf{P}_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$

Srovnejte tento příklad se stranou 17 kapitoly „matice zobrazení“.