Změna báze

- matice přechodu od báze k bázi
- jak se změní souřadnice vektoru při změně báze?
- jak se změní matice lineárního zobrazení při změně báze?
- jak se změní matice transformace při změně báze?

Matice přechodu

Definice: Nechť $(B) = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n)$ a $(C) = (\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \ldots, \overrightarrow{c}_n)$ jsou dvě báze stejného lineárního prostoru L. Pak existuje jediná lineární transformace $A : L \to L$, pro kterou je

$$A(\overrightarrow{b}_i) = \overrightarrow{c}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Matice této lineární transformace vzhledem k bázi (B) se nazývá *matice přechodu od báze* (B) *k bázi* (C).

- Značení: $\mathbf{P}_{B\to C}$ je matice přechodu od (B) k (C).

Vlastnosti matice přechodu

- $\mathbf{P}_{B\to C}$ má v i-tém sloupci souřadnice vektoru $\overrightarrow{c}_i$ vzhledem k bázi (B).
- $(\overrightarrow{c}_1\ \overrightarrow{c}_2\ \ldots\ \overrightarrow{c}_n) = (\overrightarrow{b}_1\ \overrightarrow{b}_2\ \ldots\ \overrightarrow{b}_n) \cdot \mathbf{P}_{B\to C}$,
- $\mathbf{P}_{B\to C}$ je matice identity vzhledem k bázím (C) a (B)
- Pro každý vektor $\overrightarrow{u} \in L$ je

$$\mathbf{P}_{B\to C} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \overrightarrow{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \overrightarrow{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix}.$$

Pozor, je to opačně, než by odpovídalo názvu matice přechodu!

Matice přechodu je regulární

Platí:

- $\mathbf{P}_{B\to C}$ je regulární.
- $\mathbf{P}_{B\to C} \cdot \mathbf{P}_{C\to D} = \mathbf{P}_{B\to D}$
- $(\mathbf{P}_{B\to C})^{-1} = \mathbf{P}_{C\to B}$

Důkaz: Protože má matice $\mathbf{P}_{B\to C}$ lin. nezávislé sloupce, je regulární. Součin matic přechodu vyplývá z věty o matici složeného zobrazení. Je potřeba v tomto případě skládat identické zobrazení a jeho matice vzhledem k různým bázím. Konečně třetí puntík je důsledkem druhého.

Příklad

Jsou dány $(S) = (1, x, x^2)$ a $(C) = (x^2 + x,\ x - 1,\ x + 2)$, dvě báze lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně. Najdeme matici přechodu $\mathbf{P}_{S\to C}$. Ta obsahuje ve sloupcích souřadnice bázových prvků $\vec{c}_i$ vzhledem k bázi (S), tedy

$$\mathbf{P}_{S\to C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jsou-li (α, β, γ) souřadnice polynomu p vzhledem k (C), pak

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

jsou souřadnice téhož polynomu vzhledem k bázi (S), neboli

$$p(x) = \alpha x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\,x - \beta + 2\gamma.$$

Algoritmus pro sestavení matice přechodu

- Matici přechodu $\mathbf{P}_{S\to B}$ od standardní báze (S) k bázi (B) sestavíme snadno: do sloupců zapíšeme souřadnice vektorů $\overrightarrow{b}_i$ vzhledem k bázi (S).
- Platí: $\mathbf{P}_{B\to C} = \mathbf{P}_{B\to S} \cdot \mathbf{P}_{S\to C} = (\mathbf{P}_{S\to B})^{-1} \cdot \mathbf{P}_{S\to C}$.
- Protože $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$, stačí napsat následující dvoublokovou matici a eliminovat:

$$(\mathbf{P}_{S\to B}\,|\,\mathbf{P}_{S\to C}) \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{P}_{S\to B}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{S\to C}) = (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{P}_{B\to C}).$$

V pravém bloku po eliminaci najdeme hledanou matici $\mathbf{P}_{B\to C}$

Příklad

Jsou dány báze $(B) = (x^2+1, x^2+2, x+3)$ a $(C) = (x^2+x,\ x-1,\ x+2)$ lineárního prostoru polynomů nejvýše druhého stupně. Najdeme matici přechodu $\mathbf{P}_{B\to C}$.

Zvolme bázi, vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají, například $(S) = (1, x, x^2)$. Podle algoritmu z předchozí stránky sestavíme $(\mathbf{P}_{S\to B} \,|\, \mathbf{P}_{S\to C})$ a eliminujeme na tvar $(\mathbf{E} \mid \mathbf{P}_{B\to C})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

V pravém bloku po eliminaci máme matici $\mathbf{P}_{B\to C}$. Známe-li souřadnice polynomu vzhledem k (C), pak násobením maticí $\mathbf{P}_{B\to C}$ získáme souřadnice polynomu vzhledem k (B). Kdybychom potřebovali ze souřadnice vzhledem k (B) spočítat souřadnice vzhledem k (C), použijeme inverzní matici $(\mathbf{P}_{B\to C})^{-1} = \mathbf{P}_{B\to C}$.

Změna matice zobrazení při změně báze

Nechť $\mathbf{A}$ je matice zobrazení $A : L_1 \to L_2$ vzhledem k bázím (B) a (C). Nechť $\mathbf{A}'$ je matice téhož zobrazení, ovšem vzhledem k bázím (B') a (C'). Pak

$$\mathbf{P}_{C'\to C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B\to B'} = \mathbf{A}'$$

Náčrt důkazu:

$$\mathbf{P}_{C'\to C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B\to B'} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \overrightarrow{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B') \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{C'\to C} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \overrightarrow{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{P}_{C'\to C} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \overrightarrow{A}(u) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \overrightarrow{A}(u) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C') \end{pmatrix}$$

Důsledky věty o změně matice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice zobrazení $A : L_1 \to L_2$ vzhledem k bázím (B) a (C). Pak

- $\mathbf{P}_{C' \to C} \cdot \mathbf{A}$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C').
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \to B'}$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B') a (C).

Nechť $\mathbf{A}$ je matice transformace $A : L \to L$ vzhledem k bázi (B). Pak

- $\mathbf{P}_{B' \to B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \to B'}$ je matice transformace A vzhledem k bázi (B'), neboli:
- $(\mathbf{P}_{B \to B'})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B \to B'}$ je matice transformace A vzhledem k (B').

Příklad

Nechť $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$. Najdeme matici této transformace ke standardní bázi (S). Dále najdeme matici této transformace vzhledem k bázi $(B) = ((2,2,2),(3,3,0),(4,0,0))$.

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{S\to B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}_B$ transformace A vzhledem k bázi (B) spočítáme takto:

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{P}_{B\to S} \cdot \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{P}_{S\to B} = (\mathbf{P}_{S\to B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{P}_{S\to B} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmus: sestavení matice zobrazení vzhledem k libovolným bázím

Je dáno lineární zobrazení $A : L_1 \to L_2$. Najdeme matici tohoto zobrazení vzhledem k bázím (B) a (C).

Nechť (S) je báze L_2, vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají. Sestavíme matici $(\mathbf{P}_{S\to C} \,|\, \mathbf{A}_{B,S})$, ve které $\mathbf{A}_{B,S}$ značí matici zobrazení A vzhledem k bázím (B), (S). Eliminujeme na tvar $(\mathbf{E} \mid \mathbf{X})$. Pak $\mathbf{X}$ je hledaná matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C).

Proč? Je $(\mathbf{P}_{S\to C} \mid \mathbf{A}_{B,S}) \sim (\mathbf{E} \mid \mathbf{P}_{C\to S} \cdot \mathbf{A}_{B,S})$.
Přitom $\mathbf{P}_{C\to S} \cdot \mathbf{A}_{B,S}$ je maticí zobrazení $\mathbf{A}$ vzhledem k (B) a (C).

Poznámka: matice $\mathbf{P}_{S\to C}$ a $\mathbf{A}_{B,S}$ lze sestavit snadno.

Příklad

Je dáno zobrazení $A : P_3 \to P_2$, které derivuje polynomy nejvýše třetího stupně. Najdeme matici tohoto zobrazení vzhledem k:

$$(B) = (x^3+x+2, x^2+2x+3, x^2+2, x-1), \quad (C) = (x^2-x+1, x^2-x-1, x+4)$$

Zvolím $(S) = (x^2, x, 1)$. To je báze, vzhledem ke které se souřadnice polynomů z P_2 dobře hledají. Je:

$$A(x^3+x+2) = 3x^2+1,\ A(x^2+2x+3) = 2x+2,\ A(x^2+2) = 2x,\ A(x-1) = 1$$

Sestavím matici $(\mathbf{P}_{S\to C} \,|\, \mathbf{A}_{B,S})$ a eliminuji:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|cccc} & -4 & -3 & -4 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{E} & 7 & 3 & 4 & -\frac{1}{2} \\ & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Hledaná matice je v pravém bloku po eliminaci.

Příklad

Je dána matice $\mathbf{A}'$ zobrazení vzhledem k bázím (B) a (S_2). Hledáme matici $\mathbf{A}$ zobrazení vzhledem k bázím (S_1) a (S_2).

Jinými slovy: známe zobrazení A na bázi (B) a hledáme vzorec, který udává hodnotu tohoto zobrazení v libovolném bodě. Například je známo

$$A(1,1,2) = (1,0,1,0),\ A(1,2,2) = (2,0,2,0),\ A(2,1,5) = (1,2,2,1).$$

Řešení. Podle strany [9] je $\mathbf{A} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{P}_{B\to S_1} = \mathbf{A}' \cdot (\mathbf{P}_{S_1\to B})^{-1}$. Matici přechodu $\mathbf{P}_{S_1\to B}$ sestavíme snadno. Jde tedy o to ji invertovat a násobit zprava s danou maticí $\mathbf{A}'$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad

Nechť osa o prochází počátkem a svírá s osou x úhel α. Najdeme matici osové soměrnosti podle osy o.

Zvolíme bázi (B) tak, aby vektor $\overrightarrow{b}_1$ ležel v ose o a $\overrightarrow{b}_2$ byl na ní kolmý. Vzhledem k této bázi je matice osové souměrnosti rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nyní provedeme přechod od báze (B) k bázi (S). Matice osové souměrnosti vzhledem k (S) je

$$\mathbf{P}_{S\to B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_{B\to S},$$

$$\mathbf{P}_{S\to B} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{S\to B} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$

Srovnejte tento příklad se stranou 17 kapitoly „matice zobrazení“.

Příklad

Nechť $A : L \to L$ je lineární transformace, která zobrazí bázi (B) na bázi (C). Víme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{B\to C}$ je rovna matici této transformace A vzhledem k bázi (B). Jak vypadá matice stejné transformace vzhledem k bázi (C)?

Řešení: Označme matici zobrazení A vzhledem k (B) symbolem $\mathbf{A}_B$ a hledanou matici označme $\mathbf{A}_C$. Je $\mathbf{A}_B = \mathbf{P}_{B\to C}$. Podle důsledku ze strany [9] je

$$\mathbf{A}_C = (\mathbf{P}_{B\to C})^{-1} \cdot \mathbf{A}_B \cdot \mathbf{P}_{B\to c} = (\mathbf{P}_{B\to C})^{-1} \cdot \mathbf{P}_{B\to c} \cdot \mathbf{P}_{B\to c} = \mathbf{P}_{B\to c}$$

Ejhle, matice transformace A vzhledem k bázi (C) je *stejná*, jako matice této transformace vzhledem k bázi (B) a je to matice přechodu od (B) k (C).