Lineární (ne)závislost

Skupiny, resp. množiny, vektorů mohou být *lineárně závislé* nebo *lineárně nezávislé*…

a) zavislost, 3, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Odečítání vektorů, asociativita

Místo, abychom psali zdlouhavě: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{y}$, píšeme stručněji $\vec{x} - \vec{y}$.

Vektoru $-\vec{y} = (-1) \cdot \vec{y}$ říkáme *opačný vektor k vektoru* $\vec{y}$.

Pozorování: $\vec{x} - \vec{x} = \vec{o}$, protože
$\vec{x} - \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 + (-1)) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.

Další zkrácení zápisu: Protože $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$, tj. nezáleží na pořadí provádění operací, budeme nadále závorky vynechávat a psát jen $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

Lineární kombinace

Vše, co s vektory můžeme dělat je:

- násobit je konstantou
- sčítat je mezi sebou, neboli:
- tvořit lineární kombinace.

Definice: *Linární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ je vektor:

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n$$

Reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se nazývají *koeficienty lineární kombinace*.

Triviální lineární kombinace

Definice: Má-li lineární kombinace všechny koeficienty nulové, říkáme ji *triviální*. Triviální lineární kombinace vypadá takto:

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 0\vec{x}_n$$

Má-li lineární kombinace aspoň jeden koeficient nenulový, říkáme ji *netriviální*.

Pozorování: Triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

Plyne to z axiomu (7) a z tvrzení, že $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$.

Lineární závislost, lineární nezávislost

Definice: Skupina vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je *lineárně závislá*, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru.

Skupina vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je *lineárně nezávislá*, pokud neexistuje jejich netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru, tedy pokud jedině jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru, neboli pokud z rovnosti

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$$

nutně plyne $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Příklady

- v $\mathbf{R}^3$ jsou vektory $(1, 2, 3), (5, 7, 8), (3, 3, 2)$ lineárně závislé
- v $\mathbf{R}^3$ jsou vektory $(1, 2, 3), (4, 7, 8), (3, 4, 2)$ lineárně nezávislé.
- v prostoru reálných funkcí jsou vektory $\sin(x), \cos(x), e^x$ lineárně nezávislé.
- v prostoru reálných funkcí jsou vektory $\sin^2 x, \cos^2 x, 3$ lineárně závislé.
- v prostoru polynomů jsou vektory $x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - 1$ lienárně závislé.

Všechny příklady si ověřte podle definice.

Jiný pohled na lineární závislost

Tvrzení: Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou lineárně závislé právě když existuje aspoň jeden z nich, který je lineární kombinací ostatních.

Důkaz. 1. nechť jsou lin. závislé. Pak existuje jejich netriviální lin. kombinace rovna nulovému vektoru, tj. aspoň jeden koeficient je nenulový, vydělením tímto koeficientem a přenosem vektoru na druhou stranu rovnosti zjišťujeme, že vektor je lineární kombinací ostatních.

2. nechť existuje jeden vektor, který je lineární kombinací ostatních. Přeneseme jej na druhou stranu rovnosti (odečteme jej) a máme netriviální lineární kombinaci rovnou nulovému vektoru.

Procvičování pochopení definice

- Lineární (ne)závislost není podmíněna pořadím vektorů ve skupině.
- Skupina vektorů, v níž se některý vektor opakuje, je lineárně závislá.
- Skupina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá.
- Skupina dvou vektorů je lineárně závislá právě když jeden je násobkem druhého.
- Přidáním vektoru do lineárně závislé skupiny se její závislost nezmění.
- Odebráním vektoru z lineárně nezávislé skupiny se její nezávislost nezmění.

Závislost orientovaných úseček

- Dvě orientované úsečky jsou lineárně závislé právě když leží ve společné přímce.
- Tři orientované úsečky jsou lineárně závislé právě když leží ve společné rovině.
- Čtyři orientované úsečky jsou závislé vždy.

Závislost nekonečných množin vektorů

Pravidlo: V algebře pracujeme jen s konečnými lineárními kombinacemi, tj. sčítanců je vždy konečně mnoho.

- Nekonečná množina M vektorů je *lineárně závislá*, pokud existuje jejich konečná lineárně závislá podmnožina, tj. existují vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ z množiny M tak, že jsou lineárně závislé.
- Nekonečná množina M vektorů je *lineárně nezávislá*, pokud každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá, jinými slovy neexistuje lineárně závislá konečná podmnožina. Ještě jinak: neexistuje žádný vektor z M, který by se rovnal konečné lineární kombinaci ostatních vektorů.

Příklad nekonečné lin. nezávislé množiny

Množina polynomů $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$ je lineárně nezávislá.

Lineární obal

Definice: Lineární obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je množina všech jejich lineárních kombinací, tedy

$$\{\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}\}$$

Lineární obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ značíme $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$.

Lineární obal (konečné nebo nekonečné) množiny vektorů M je množina všech konečných lineárních kombinací vektorů z množiny M. Lineární obal množiny M značíme $\langle M \rangle$.

Pozorování: $M \subseteq \langle M \rangle$.

Geometrická představa lineárního obalu

Předpokládejme vektory z množiny orientovaných úseček se společným počátkem O.

- Lineární obal jednoho nenulového vektoru je množina všech vektorů ležících ve společné přímce.
- Lineární obal dvou lineárně nezávislých vektorů je množina všech vektorů ležících ve společné rovině.
- Lineární obal tří lineárně nezávislých vektorů je množina všech orientovaných úseček.
- Lineární obal (libovolně mnoha) vektorů ležícich ve společné rovině je množina všech vektorů ležících v této rovině.

Obal obalu

Věta: $\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$, neboli:
lineární obal lineárního obalu už není větší než původní lineární obal.

Důkaz: Lineární kombinace lineárních kombinací vektorů z M je po využití distributivního zákona rovna přímo lineární kombinaci vektorů z M (rozepište si to).

Obal je podprostor

(1) Je-li P lineárním obalem nějaké množiny M, je P lineární podprostor.

(2) P je lineární podprostor právě tehdy, když $\langle P\rangle = P$.

(3) Lineární obal množiny M je nejmenší lineární podprostor obsahující M.

Důkazy: (1) Součet prvků z obalu zůstává v obalu a α-násobek také. Protože lineární kombinace lin. kombinací je přímo lin. kombinace.

(2) Je-li P lineární podprostor, pak všechny lineární kombinace prvků z P zůstávají v P, takže $\langle P\rangle = P$. Obráceně: viz (1), stačí zvolit $M = P$.

(3) Nechť $P = \langle M\rangle$ a Q je podprostor obsahující M, tedy $M \subseteq Q$. Je $P = \langle M\rangle \subseteq \langle Q\rangle = Q$, takže je P nejmenší.

Rozšíření lineárně nezávislé množiny

Věta: Je-li N lineárně nezávislá množina vektorů a $z \notin \langle N\rangle$, pak $N \cup \{\vec{z}\}$ je lineárně nezávislá.

Důkaz: Sporem. Nechť $N \cup \{\vec{z}\}$ je lineárně závislá. Pak existuje konečně mnoho $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in N$ tak, že

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n + \alpha_{n+1} \vec{z} = \vec{o},$$

a přitom aspoň jedno α_i je nenulové. Kdyby byla $\alpha_{n+1} = 0$, máme netriviální lin. kombinaci vektorů nezávislé množiny N rovnu nulovému vektoru a to není možné. Takže musí $\alpha_{n+1} \neq 0$. Po vydělení α_{n+1} a převedení $\vec{z}$ na druhou stranu rovnosti je $\vec{z}$ lineární kombinací vektorů z N, což je ve sporu s tím, že $z \notin \langle N\rangle$.

Redukce lin. nezávislé množiny

Věta: Množina N je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá její vlastní podmnožina má menší obal.

Důkaz: Nechť N je nezávislá. Nechť $N' \subset N$. Vektor $\overrightarrow{z} \in N \setminus N'$ není lin. kombinací prvků z N', protože jinak by N byla závislá. Nemůže tedy $\langle N \rangle = \langle N' \rangle$, protože v takovém případě je $\overrightarrow{z} \in \langle N' \rangle$.

Nechť N je závislá. Existuje jeden vektor $\overrightarrow{z}$, který je lin. kombinací ostatních. Jeho odebráním vzniká N', která má stejný lin. obal.