Vlastní číslo, vektor

- motivace: směr přímky, kterou lin. transformace nezmění
- invariantní podprostory
- charakteristický polynom
- báze, vzhledem ke které je matice transformace nejjednodušší
- podobnost s diagonální maticí

a) vlcisla, 14, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Motivace

Je dána transformace $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Najdeme takovou přímku p procházející počátkem, aby $A(p) = p$.

$$p = \{t\vec{u};\, t \in \mathbf{R}\}, \qquad A(p) = \{A(t\vec{u});\, t \in \mathbf{R}\} = \{tA(\vec{u});\, t \in \mathbf{R}\}$$

Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, aby $A(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Přitom $\vec{u}$ musí být nenulový vektor.

Zvolme v R^2 nějakou bázi (např. standardní). Nechť $\mathbf{x}$ jsou souřadnice $\vec{u}$ vzhledem k této bázi a $\mathbf{A}$ je matice transforamce A vzhledem k této bázi. Pak musí

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{o}, \quad \text{tj.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$$

Takže matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ musí být singulární, neboli $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Číslu λ budeme říkat *vlastní číslo* a vektoru $\vec{u}$ říkáme *vlastní vektor* transformace A příslušející vlastnímu číslu λ.

Vlastní čísla jsou i komplexní

Kvadratická rovnice $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = 0$ (viz předchozí motivační příklad) může ale nemusí mít reálné kořeny. Pokud má dva různé reálné kořeny, pak existují dva směry, které transformace A nemění. Tj. existují dvě přímky, pro které je $A(p) = p$. Například zkosení, které $(1,0)$ nechá beze změny a $(0,1)$ zobrazí na $(1,1/2)$.

Pokud jsou kořeny rovnice $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = 0$ komplexní, pak neexistují přímky, pro které je $A(p) = p$ (například rotace). Pokud bychom chtěli najít vlastní vektory příslušející komplexním vlastním číslům, budou mít komplexní souřadnice. Je tedy potřeba pracovat s lineárním prostorem nad komplexními čísly.

Budeme potřebovat záruku existence vlastních čísel. Budeme tedy muset připustit komplexní vlastní čísla a pracovat s lineární prostorem L nad $\mathbf{C}$.

Invariantní podprostor

Nechť $A : L \to L$ je lineární transformace. Podprostor $P \subset L$, pro který platí $A(P) = P$ nazýváme *invariantní podprostor* vzhledem k A.

Předběžná úvaha:

Je-li L lineární prostor nad $\mathbf{C}$, pak zaručeně existují vlastní čísla $\lambda \in \mathbf{C}$, pro která je $A(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{o}$. Společně s nulovým vektorem tvoří všechny vlastní vektory příslušející pevně vybranému vlastnímu číslu λ invariantní podprostor.

Je-li L lineární prostor nad $\mathbf{R}$, pak kromě $\{\overrightarrow{o}\}$ a L další invariantní podprostory vzhledem k A nemusejí existovat: vlastní čísla mohou být jen komplexní. Například A je rotace.

Vlastní číslo, vlastní vektor matice

Definice: Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n,n) reálných nebo komplexních čísel. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$, pokud existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n,1}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, takový, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ.

Pozorování: Z rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ plyne $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Protože z definice musí $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, je třeba, aby soustava měla nenulové řešení, tedy musí $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Definice: Polynom v proměnné λ tvaru $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ se nazývá *charakteristický polynom matice* $\mathbf{A}$.

Pozorování: Charakteristický polynom je stupně n a jeho kořeny jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}$ má tedy (včetně násobností) n vlastních čísel.

Vlastní číslo, vlastní vektor transformace

Definice: Nechť L je lineární prostor konečné dimenze nad $\mathbf{C}$ a nechť $A : L \to L$ je lineární transformace. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem transformace* A, pokud existuje vektor $\overrightarrow{x} \in L$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{o}$ takový, že $A(\overrightarrow{x}) = \lambda\,\overrightarrow{x}$. Vektor $\overrightarrow{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor transformace* A *příslušný vlastnímu číslu* λ.

Pozorování: Vlastní číslo transformace A je stejné jako vlastní číslo její matice $\mathbf{A}$ vzhledem k jakékoli bázi (B). Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ pak obsahuje souřadnice vlastního vektoru transformace A vzhledem k bázi (B).

Důsledek: Všechny matice stejné lineární transformace (vzhledem k různým bázím) mají shodná vlastní čísla (mají shodné spektrum).

Příklad

Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme její vlastní čísla a k nim příslušející vlastní vektory.

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$$

Toto je charakteristický polynom matice **A**. Má dvojnásobný kořen $\lambda = 3$ a jednonásobný kořen $\lambda = 2$. Tyto kořeny jsou vlastní čísla matice **A**.

Najdeme ještě vlastní vektory příslušející vlastním číslům 3 a 2…

Příklad, pokračování

$$\lambda = 3: \quad \begin{pmatrix} 5-3 & -2 & 2 \\ -1 & 4-3 & -1 \\ -4 & 4 & -1-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

takže k $\lambda = 3$ přísluší vlastní vektory z $\langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle$.

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix} 5-2 & -2 & 2 \\ -1 & 4-2 & -1 \\ -4 & 4 & -1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

takže k $\lambda = 2$ přísluší vlastní vektory z $\langle (-2,1,4) \rangle$.

Pro vlastní čísla a vlastní vektory platí např. následující vztahy:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jiný příklad

$$\text{Je dána matice} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristický polynom je

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

Hledáme vlastní vektory příslušející vlastním číslům 3 a 2:

$$\lambda = 3: \quad \begin{pmatrix} 2-3 & 4 & -3 \\ -1 & 10-3 & -6 \\ -1 & 8 & -4-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{vlastní} \\ \text{vektor:} \\ (1,1,1)\end{matrix}$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix} 2-2 & 4 & -3 \\ -1 & 10-2 & -6 \\ -1 & 8 & -4-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{vlastní} \\ \text{vektor:} \\ (0,3,4)\end{matrix}$$

B má stejná vlastní čísla jako **A**, ale jiné invariantní prostory.

Podobné matice

Idea: Jak se „podobají“ matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ stejné lineární transformace A, jen vzhledem k různým bázím (B) a (B')? Platí:

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{P}_{B\to B'})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{B\to B'}$$

To nás ispiruje k následující

Definici: Říkáme, že dvě čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n,n}$ jsou *podobné*, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n,n}$ taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Pozorování1: podobnost je relace ekvivalence.

Pozorování2: podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Podobné matice mají stejný char. polynom

Tvrzení: Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz: Nechť $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je matice podobná s $\mathbf{A}$. Je

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\,\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}) = \\
&= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\,\mathbf{E}\mathbf{P}) = \\
&= \det(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{P}) = \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\,\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\det\mathbf{P} = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}).
\end{aligned}
$$

Upozornění: Obrácené tvrzení „mají-li dvě matice stejný charakteristický polynom, pak jsou podobné“ neplatí. Za chvíli ukážeme, že matice **A** a **B** z předchozích příkladů nejsou podobné.

Podobnost s diagonální maticí

Úloha: Budeme se ptát, za jakých podmínek je čtvercová matice **A** podobná s diagonální maticí tvaru:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Jiný pohled na úlohu: je dána transformace A svou maticí **A** vzhledem k nějaké bázi. Ptáme se, zda existuje jiná báze, vzhledem ke které je matice transformace A diagonální. Ptáme se tedy, zda lze vhodnou volbou báze co nejvíce zjednodušit matici transformace až na diagonální tvar.

Pokud se to povede, pak z pohledu takové báze je transformace A jen změnou měřítka ve směrech vektorů báze (resp. projekce).

Rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$

Věta: Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ a $\mathbf{D}$ jsou čtvercové matice typu (n, n), nechť $\mathbf{P}$ obsahuje nenulové sloupce a nechť $\mathbf{D}$ je diagonální. Pak platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$$

právě tehdy, když $\mathbf{D}$ obsahuje vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a i-tý sloupec matice $\mathbf{P}$ obsahuje vlastní vektor příslušející i-tému vlastnímu číslu v $\mathbf{D}$.

Důkaz: Nechť $\mathbf{D}$ obsahuje na diagonále čísla λ_i. Roznásobením rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$ po sloupcích matice $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)$ dostáváme rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i = \lambda_i \, \mathbf{p}_i$. Tyto rovnosti platí právě když λ_i je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{p}_i$ je k němu příslušející vlastní vektor.

Pozorování: Kdyby byla $\mathbf{P}$ regulární, pak $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, takže $\mathbf{A}$ bude podobná s diagonální maticí.

Podmínka podobnosti s diagonální maticí

Tvrzení: Matice **A** typu (n, n) je podobná s diagonální maticí právě když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Skutečně, stačí tyto vektory napsat do sloupců matice **P**, dále sestavit diagonální matici **D** z odpovídajících vlastních čísel a platí rovnost z předchozí strany.

Věta: Různá vlastní čísla mají lineárně nezávislé vlastní vektory.

Důkaz: technický, viz skriptum.

Důsledek: Má-li matice **A** pouze jednonásobná vlastní čísla (těch je n a jsou vzájemně různá), pak je podobná s diagonální maticí.

Upozornění: Obrácené tvrzení „**A** je podobná s diagonální, pak má vzájemně různá vlastní čísla“ neplatí. Např. **E** má n-násobné vlastní číslo 1 a je přímo rovna diagonální matici.

Příklad

Matice **A** z předchozího příkladu je podobná s diagonální. Má tři lineárně nezávislé vlastní vektory, např.

$$(1, 1, 0),\ (-1, 0, 1),\ (-2, 1, 4).$$

Tudíž platí

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice **B** z předchozího příkladu není podobná s diagonální, protože nemá tři lineárně nezávislé vlastní vektory.

Takže: matice **A** a **B** nejsou vzájemně podobné, ačkoli mají stejný charakteristický polynom a stejná vlastní čísla.

Příklad: změna báze

Matice **A** z předchozího příkladu odpovídá transformaci:

$$\begin{aligned} x' &= 5x - 2y + 2z \\ y' &= -x + 4y - z \\ z' &= -4x + 4y - z \end{aligned}$$

Vzhledem k bázi $(C) = ((1, 1, 0),\ (-1, 0, 1),\ (-2, 1, 4))$ má tatáž transformace diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

takže v této bázi se souřadnice obrazu počítají takto:

$$x' = 3x, \quad y' = 3y, \quad z' = 2z.$$

Nutná podmínka podobnosti s diagonální maticí

Dá se ukázat, že dimenze nulového prostoru matice $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ je vždy menší nebo rovna násobnosti vlastního čísla λ.

Matice $\mathbf{A}$ typu (n,n) je podobná s diagonální právě když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. To znamená, že má-li k násobné vlastní číslo λ, musí mu příslušet k lineárně nezávislých vektorů, neboli dimenze nulového prostoru matice $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ musí být přesně rovna k.

Pokud tedy pro každé vícenásobné vlastní číslo λ je dimenze nulového prostoru matice $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ přesně rovna násobnosti tohoto vlastního čísla, je matice $\mathbf{A}$ podobná s diagonální maticí.

Jordanův kanonický tvar

Dá se ukázat, že každá matice $\mathbf{A}$ je podobná aspoň se „skoro diagonální“ maticí tvaru:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ & & \dots & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_m \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Čísla λ_i jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Matici $\mathbf{J}$ se říká *Jordanův kanonický tvar matice* $\mathbf{A}$.

Na diagonále matice $\mathbf{J}$ se objeví každé vlastní číslo tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Dimenze nulového prostoru matice $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ odpovídá počtu Jordanových bloků $\mathbf{J}_i$ se stejným vlastním číslem λ. Takže tyto Jordanovy bloky se mohou pro stejné (vícenásobné) vlastní číslo opakovat.

Cvičení

- Vysvětlete, proč $\det \mathbf{A}$ je roven součinu vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.
- Vysvětlete, proč $\det \mathbf{A}$ je roven absolutnímu členu charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$.
- Předpokládejte $\mathbf{A}$ matici podobnou s diagonální. Když do charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$ místo λ zapíšete matici $\mathbf{A}$, dostáváte nulovou matici. Proč?
- Předchozí tvrzení patí i pro matice, které nejsou podobné s diagonální maticí.