

Skalární součin

- axiomatická definice
- odvození velikosti vektorů a úhlu mezi vektory
- geometrická interpretace
- ortogonalita
- vlastnosti ortonormálních bází

Definice skalárního součinu

Nechť L je lineární prostor nad \mathbf{R} . Operaci $\cdot : L \times L \rightarrow \mathbf{R}$ nazýváme *skalární součin*, pokud pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ splňuje:

$$(1) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x},$$

$$(2) \quad (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z},$$

$$(3) \quad (\alpha \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}),$$

$$(4) \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \text{ jen tehdy, když } \vec{x} = \vec{o}.$$

Poznámka: Je-li L lineární prostor nad \mathbf{C} , pak se skalárním součinem označuje operace $\cdot : L \times L \rightarrow \mathbf{C}$ se stejnými vlastnostmi, jako výše, až na první. Místo ní je:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \overline{\vec{y} \cdot \vec{x}}$$

Čísla jsou si vzájemně komplexně sdružená.

Příklady skalárních součinů

- V \mathbf{R}^n definujeme

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Toto je skalární součin, skutečně splňuje axiomy (1) až (4).

- V prostoru orientovaných úseček definujeme skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha,$$

kde $\|\dots\|$ značí velikost vektoru a α je úhel mezi vektory.

- V lineárním prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ definujeme skalární součin

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Další skalární součiny v \mathbf{R}^n

Na \mathbf{R}^2 je operace

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1.$$

také skalární součin. Na druhé straně třeba

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$$

není skalární součin (neplatí axiom 4).

Obecně, je-li \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní matice (všechny hlavní subdeterminanty jsou kladné), pak

$$\vec{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{y}^T$$

je skalární součin. Z tohoto pohledu nazýváme $\vec{x} \cdot \vec{y}^T$ *standardním* skalárním součinem na \mathbf{R}^n .

Skalární součin \longrightarrow velikost

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *velikost* vektoru \vec{x} , neboli *normu* vektoru \vec{x} vzorcem

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

Axiom (4) zaručuje, že velikost je definována pro libovolný vektor a že nulovou velikost má pouze nulový vektor.

Tvrzení: $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$, protože

$$\|\alpha \vec{x}\| = \sqrt{\alpha \vec{x} \cdot \alpha \vec{x}} = \sqrt{\alpha^2 (\vec{x} \cdot \vec{x})} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$$

Skalární součin \longrightarrow úhel mezi vektory

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *úhel mezi dvěma nenulovými vektory* \vec{x} a \vec{y} jako takové $\phi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které je

$$\cos \phi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Že $\cos \phi$ v uvedeném vzorci existuje pro libovolné dva nenulové vektory zaručuje

Schwartzova nerovnost: Pro libovolné dva vektory platí

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Důkaz: $0 \leq (\vec{x} + \alpha \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \alpha \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \alpha \cdot 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \alpha^2 \cdot (\vec{y} \cdot \vec{y})$.

Pro uvedený kvadratický polynom $A\alpha^2 + B\alpha + C$ musí platit:

$$B^2 - 4AC \leq 0, \quad \text{tj.} \quad B^2 \leq 4AC, \quad \text{tj.} \quad (-2(\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 \leq 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2,$$

$$\text{tj.} \quad \sqrt{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2} \leq \sqrt{\|\vec{x}\|^2} \sqrt{\|\vec{y}\|^2} \quad \text{tj.} \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Skalární součin \longrightarrow vzdálenost vektorů

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *vzdálenost mezi dvěma vektory* \vec{x} a \vec{y} , neboli *metriku* vzorcem

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Pro metriku platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z}) \geq \rho(\vec{x}, \vec{z}),$$

neboli $\|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| \geq \|\vec{x} - \vec{z}\|$, která označení $\vec{a} = \vec{x} - \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{y} - \vec{z}$ přechází na tvar

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \geq \|\vec{a} + \vec{b}\|.$$

Důkaz: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \leq$
 (Schwartzova nerovnost) $\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2.$

Axiomy metriky a normy

Je-li na množině L zavedena metrika $\rho(x, y)$ s vlastnostmi

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$,
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$,

říkáme množině L s metrikou ρ *metrický prostor*.

Je-li na lineárním prostoru L zavedena norma $\|\dots\|$ s vlastnostmi

- (1) $\|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{x}\| = 0$ právě když $\vec{x} = \vec{0}$,
- (2) $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$,
- (3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$,

říkáme prostoru L *lineární prostor s normou*.

My jsme odvodili normu a metriku ze skalárního součinu. Je ovšem možné je zavést jen podle uvedených axiomů, nebo zavést normu axiomaticky a odvodit metriku jako $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Příklady

Pythagorova věta: Pravoúhlý trojúhelník budou tvořit dva na sebe kolmé vektory \vec{x} a \vec{y} . Jejich rozdíl tvoří přeponu.

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Ve výpočtu jsme využili toho, že dva nenulové vektory \vec{x} a \vec{y} jsou na sebe kolmé právě když $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Rovnoběžníková rovnost: součet druhých mocnin velikostí úhlopříček v rovnoběžníku je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin velikostí sousedních stran.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2 (\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2).$$

protože

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2.$$

Ortonormální báze

Na lineárním prostoru se skalárním součinem můžeme měřit velikosti vektorů a úhly mezi nenulovými vektory.

Zejména *kolmost* (ortogonalitu) dvou nenulových vektorů \vec{x} a \vec{y} poznáme podle podmínky $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Mezi různými bázemi se ukáže výhodné vybírat takové báze, ve kterých jsou si všechny vektory navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. Tyto báze nazýváme *ortonormální*.

Definice: Báze se nazývá *ortogonální*, pokud pro každé dva různé prvky báze \vec{b}_i a \vec{b}_j platí $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$.

Báze se nazývá *ortonormální*, je-li ortogonální a všechny její prvky mají jednotkovou velikost, neboli

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Skalární součin počítaný pomocí souřadnic

Věta: Nechť (B) je konečná ortonormální báze lineárního prostoru L . Nechť (x_1, x_2, \dots, x_n) jsou souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k bázi (B) a nechť (y_1, y_2, \dots, y_n) jsou souřadnice vektoru \vec{y} vzhledem k bázi (B) . Pak

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} & (x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + \dots + x_n \vec{b}_n) \cdot (y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2 + \dots + y_n \vec{b}_n) = \\ = & x_1 y_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 y_1 \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \dots + x_1 y_2 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \dots + x_n y_n \vec{b}_n \cdot \vec{b}_n = \\ & = x_1 y_1 \cdot 1 + x_2 y_1 \cdot 0 + \dots + x_1 y_2 \cdot 0 + \dots + x_n y_n \cdot 1 = \\ & = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Kolmost zaručuje lineární nezávislost

Věta: Necht' $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou nenulové vektory, které jsou na sebe navzájem kolmé. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Důkaz: Ověříme

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti skalárně vektorem \vec{x}_i , dostáváme na levé straně součet nul s výjimkou jediného sčítance, protože vektor \vec{x}_i je kolmý na všechny všechny ostatní vektory \vec{x}_j . Máme tedy

$$\alpha_i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \cdot \vec{x}_i = 0.$$

Protože $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i$ je nenulové číslo, musí být $\alpha_i = 0$. Tuto operaci můžeme provést pro každý index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, takže všechna čísla α_i jsou nutně nulová.

Souřadnice počítané ze skalárního součinu

Věta: Necht' $(B) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak souřadnice libovolného vektoru \vec{x} vzhledem k bázi (B) jsou

$$(\vec{x} \cdot \vec{b}_1, \vec{x} \cdot \vec{b}_2, \dots, \vec{x} \cdot \vec{b}_n).$$

Důkaz: Označme $\vec{y} = (\vec{x} \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{b}_n) \vec{b}_n$. Máme dokázat, že $\vec{x} = \vec{y}$. Násobme vektor \vec{y} vektorem \vec{b}_i :

$$\begin{aligned} \vec{y} \cdot \vec{b}_i &= ((\vec{x} \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{b}_n) \vec{b}_n) \cdot \vec{b}_i = \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{b}_i) \vec{b}_i \cdot \vec{b}_i = \vec{x} \cdot \vec{b}_i, \end{aligned}$$

protože báze je ortonormální. Je $\vec{x} \cdot \vec{b}_i = \vec{y} \cdot \vec{b}_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Co, kdyby $\vec{x} \neq \vec{y}$? Vektor $\vec{x} - \vec{y}$ je kolmý na všechny prvky \vec{b}_i , protože $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{b}_i = 0$. Pak jsou vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n, \vec{x} - \vec{y}$ lineárně nezávislé, ale to je ve sporu s tím, že (B) je báze.

Básnička: čtvrtá dimenze

Jednou v hospodě u Karla čtvrtého,
uviděl jsem kus prostoru čtvrtého.

Čtyři pŭllitry u stropu nad sálem,
letěly k sobě kolmo navzájem,
což není možné v dimenzi třetí,
kde nejvýše tři pŭllitry k sobě letí.

Tak poznal jsem díky otci vlasti,
jaké jsou v pŭllitru skryty slasti.
Jak všem čechům rozšiřuje obzory
o n -dimenzionální prostory.

in: Emil Calda: Říkanky množinově nelogické

Geometrická představa skalárního součinu

Předpokládejme, že vektory \vec{x} a \vec{y} jsou orientované úsečky, navíc nechť \vec{y} má jednotkovou velikost. Sestrojme z koncového bodu vektoru \vec{x} kolmý průmět na přímku, procházející vektorem \vec{y} . Velikost tohoto kolmého průmětu (je-li na polopřímce společně s vektorem \vec{y}) je skalární součin $\vec{x} \cdot \vec{y}$. Je-li průmět na opačné polopřímce, pak skalární součin je záporný a jeho absolutní hodnota je rovna velikosti průmětu.

Tato geometrická interpretace vychází ze vzorce:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \phi.$$

Z tohoto pohledu říká věta ze stránky [13], že souřadnice vektoru jsou průměty vektoru na jednotlivé souřadnicové osy.

Úhly vektoru s osami

Věta: Necht' (x_1, x_2, \dots, x_n) jsou souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k ortonormální bázi $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$. Pak úhel ϕ_i mezi vektorem \vec{x} a vektorem \vec{b}_i má velikost ϕ_i , pro kterou je

$$\cos \phi_i = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}.$$

Důkaz:

$$\cos \phi_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\|\vec{x}\| \|\vec{b}_i\|} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\|\vec{x}\|} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}.$$

V úpravách jsme využili toho, že $\|\vec{b}_i\| = 1$ (báze je ortonormální) a dále předchozí věty, podle které je $x_i = \vec{x} \cdot \vec{b}_i$.

Důsledek: $\cos^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_2 + \dots + \cos^2 \phi_n = 1$

Schmidtův ortogonalizační proces

Zhruba: každou konečnou bázi lze „opravit“ tak, aby byla ortonormální. Oprava k -tého vektoru vždy probíhá v lineárním obalu prvních k vektorů. Tj. první vektor opravíme na přímce dané prvním vektorem, druhý vektor opravíme v rovině dané prvními dvěma vektory, atd.

Přesně: Nechť $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ je libovolná báze. Pak existuje ortonormální báze $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$ taková, že

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_k \rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Důkaz: oprava každého vektoru probíhá ve dvou krocích. Vektor se (uvnitř zmíněného lin. obalu) „natočí“ a následně se „normuje“:

$$\vec{b}'_{k+1} = \vec{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\vec{b}_{k+1} \cdot \vec{c}_i) \vec{c}_i, \quad \vec{c}_{k+1} = \frac{\vec{b}'_{k+1}}{\|\vec{b}'_{k+1}\|}.$$

Ortogonalní matice

Předpokládejme v \mathbf{R}^n standardní skalární součin. Matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n,n}$, která ve sloupcích obsahuje nějakou ortonormální bázi prostoru \mathbf{R}^n , se nazývá *ortogonalní*.

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- \mathbf{A} je ortogonalní,
- $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$,
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$,
- \mathbf{A}^T je ortogonalní,
- \mathbf{A} obsahuje v řádcích souřadnice ortonormální báze,
- \mathbf{A} je maticí přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

Další vlastnosti ortogonální matice

- Je-li \mathbf{A} ortogonální, pak $\det \mathbf{A} = 1$ nebo $\det \mathbf{A} = -1$.
- Je-li \mathbf{A} ortogonální a je-li \mathbf{x} sloupcový vektor, pak sloupcový vektor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ má stejnou velikost jako vektor \mathbf{x} .
- Součin ortogonálních matic je ortogonální.

První puntík:

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})^2.$$

Druhý puntík:

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{Ax})^T \cdot (\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Třetí puntík:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

QR rozklad

Je-li \mathbf{A} regulární matice, pak existuje ortogonální matice \mathbf{Q} a horní trojúhelníková matice \mathbf{R} tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}.$$

Důkaz: Sloupce matice \mathbf{A} tvoří nějakou bázi (B). Na tuto bázi provedeme Schmidtův ortogonalizační proces a tím dostaneme ortonormální bázi (C). Zapišeme ji do sloupců matice \mathbf{Q} . Matice \mathbf{R} je maticí přechodu od ortonormální báze (C) k bázi (B). Obsahuje souřadnice vektorů \vec{b}_k z báze (B) vzhledem k (C). Díky vlastnosti

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_k \rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

jsou souřadnice vektoru \vec{b}_k vzhledem k (C) pro $i > k$ nulové, takže \mathbf{R} je horní trojúhelníková.