Skalární součin

- axiomatická definice
- odvození velikosti vektorů a úhlu mezi vektory
- geometrická interpretace
- ortogonalita
- vlastnosti ortonormálních bází

Definice skalárního součinu

Nechť L je lineární prostor nad $\mathbf{R}$. Operaci $\cdot : L \times L \to \mathbf{R}$ nazýváme *skalární součin*, pokud pro všechna $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ splňuje:

(1) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$,

(2) $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z}$,

(3) $(\alpha \cdot \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \alpha \cdot (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})$,

(4) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} \geq 0$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 0$ jen tehdy, když $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{o}$.

Poznámka: Je-li L lineární prostor nad $\mathbf{C}$, pak se skalárním součinem označuje operace $\cdot : L \times L \to \mathbf{C}$ se stejnými vlastnostmi, jako výše, až na první. Místo ní je:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overline{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}}$$

Čísla jsou si vzájemně komplexně sdružená.

Příklady skalárních součinů

- V $\mathbf{R}^n$ definujeme

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) \;=\; x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

  Toto je skalární součin, skutečně splňuje axiomy (1) až (4).

- V prostoru orientovaných úseček definujeme skalární součin

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos\alpha,$$

  kde $\|\dots\|$ značí velikost vektoru a α je úhel mezi vektory.

- V lineárním prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ definujeme skalární součin

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

Další skalární součiny v $\mathbf{R}^n$

Na $\mathbf{R}^2$ je operace

$$(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1+6x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1.$$

také skalární součin. Na druhé straně třeba

$$(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1+2x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1$$

není skalární součin (neplatí axiom 4).

Obecně, je-li $\mathbf{A}$ symetrická a pozitivně definitní matice (všechny hlavní subdeterminanty jsou kladné), pak

$$\overrightarrow{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\overrightarrow{y}^T$$

je skalární součin. Z tohoto pohledu nazýváme $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}^T$ *standardním* skalárním součinem na $\mathbf{R}^n$.

Skalární součin $\longrightarrow$ velikost

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *velikost* vektoru $\overrightarrow{x}$, neboli *normu* vektoru $\overrightarrow{x}$ vzorcem

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}.$$

Axiom (4) zaručuje, že velikost je definována pro libovolný vektor a že nulovou velikost má pouze nulový vektor.

Tvrzení: $\|\alpha \overrightarrow{x}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{x}\|$, protože

$$\|\alpha \overrightarrow{x}\| = \sqrt{\alpha \overrightarrow{x} \cdot \alpha \overrightarrow{x}} = \sqrt{\alpha^2 (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{x}\|$$

Skalární součin $\longrightarrow$ úhel mezi vektory

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *úhel mezi dvěma nenulovými vektory* $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ jako takové $\phi \in \langle 0, \pi)$, pro které je

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x}\|\,\|\overrightarrow{y}\|}$$

Že $\cos\phi$ v uvedeném vzorci existuje pro libovolné dva nenulové vektory, zaručuje

Schwartzova nerovnost: Pro libovolné dva vektory platí

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \le \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|.$$

Důkaz: $0 \le (\overrightarrow{x} + \alpha\,\overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} + \alpha\,\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \alpha \cdot 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}) + \alpha^2 \cdot (\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y})$.
Pro uvedený kvadratický polynom $A\alpha^2 + B\alpha + C$ musí platit:

$$B^2 - 4AC \le 0, \quad \text{tj.} \quad B^2 \le 4AC, \quad \text{tj.} \quad (-2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}))^2 \le 4\,\|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2,$$
$$\text{tj.} \quad \sqrt{(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2} \le \sqrt{\|\overrightarrow{x}\|^2}\sqrt{\|\overrightarrow{y}\|^2} \quad \text{tj.} \quad |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \le \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|.$$

Skalární součin $\longrightarrow$ vzdálenost vektorů

V lineárním prostoru L se skalárním součinem definujeme *vzdálenost mezi dvěma vektory* $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$, neboli *metriku* vzorcem

$$\rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

Pro metriku patí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + \rho(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \;\geq\; \rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}),$$

neboli $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| + \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}\| \geq \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}\|$, to při označení $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}$ přechází na tvar

$$\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\| \;\geq\; \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|.$$

Důkaz: $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b} \leq$ (Schwartzova nerovnost) $\leq \|\overrightarrow{a}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{b}\|^2 = (\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|)^2$.

Axiomy metriky a normy

Je-li na množině L zavedena metrika $\rho(x,y)$ s vlastnostmi

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \text{ právě když } x = y,\\
&(2)\quad \rho(x,y) = \rho(y,x),\\
&(3)\quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \;\geq\; \rho(x,z),
\end{aligned}
$$

říkáme množině L s metrikou ρ *metrický prostor*.

Je-li na lineárním prostoru L zavedena norma $\|\ldots\|$ s vlastnostmi

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \|\overrightarrow{x}\| \geq 0, \quad \|\overrightarrow{x}\| = 0 \text{ právě když } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o},\\
&(2)\quad \|\alpha\overrightarrow{x}\| \;=\; |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{x}\|,\\
&(3)\quad \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \;\leq\; \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|,
\end{aligned}
$$

říkáme prostoru L *lineární prostor s normou*.

My jsme odvodili normu a metriku ze skalárního součinu. Je ovšem možné je zavést jen podle uvedených axiomů, nebo zavést normu axiomaticky a odvodit metriku jako $\rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$.

Příklady

Pythagorova věta: Pravoúhlý trojúhelník budou tvořit dva na sebe kolmé vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Jejich rozdíl tvoří přeponu.

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Ve výpočtu jsme využili toho, že dva nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou na sebe kolmé právě když $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.

Rovnoběžníková rovnost: součet druhých mocnin velikostí úhlopříček v rovnoběžníku je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin velikostí sousedních stran.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right).$$

protože

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2.$$

Ortonormální báze

Na lineárním prostoru se skalárním součinem můžeme měřit velikosti vektorů a úhly mezi nenulovými vektory.

Zejména *kolmost* (ortogonalitu) dvou nenulových vektorů $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ poznáme podle podmínky $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$.

Mezi různými bázemi se ukáže výhodné vybírat takové báze, ve kterých jsou si všechny vektory navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. Tyto báze nazýváme *ortonormální*.

Definice: Báze se nazývá *ortogonální*, pokud pro každé dva různé prvky báze $\overrightarrow{b}_i$ a $\overrightarrow{b}_j$ platí $\overrightarrow{b}_i \cdot \overrightarrow{b}_j = 0$.

Báze se nazývá *ortonormální*, je-li ortogonální a všechny její prvky mají jednotkovou velikost, neboli

$$\overrightarrow{b}_i \cdot \overrightarrow{b}_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Skalární součin počítaný pomocí souřadnic

Věta: Nechť (B) je konečná ortonormální báze lineárního prostoru L. Nechť $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{x}$ vzhledem k bázi (B) a nechť $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{y}$ vzhledem k bázi (B). Pak

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Důkaz:

$$(x_1 \overrightarrow{b}_1 + x_2 \overrightarrow{b}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{b}_n) \cdot (y_1 \overrightarrow{b}_1 + y_2 \overrightarrow{b}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{b}_n) =$$
$$= x_1 y_1 \overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 + x_2 y_1 \overrightarrow{b}_2 \cdot \overrightarrow{b}_1 + \cdots + x_1 y_2 \overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 + \cdots + x_n y_n \overrightarrow{b}_n \cdot \overrightarrow{b}_n =$$
$$= x_1 y_1 \cdot 1 + x_2 y_1 \cdot 0 + \cdots + x_1 y_2 \cdot 0 + \cdots + x_n y_n \cdot 1 =$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Kolmost zaručuje lineární nezávislost

Věta: Nechť $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n$ jsou nenulové vektory, které jsou na sebe navzájem kolmé. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Důkaz: Ověříme

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{x}_n = \overrightarrow{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall\, i$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti skalárně vektorem $\overrightarrow{x}_i$, dostáváme na levé straně součet nul s výjimkou jediného sčítance, protože vektor $\overrightarrow{x}_i$ je kolmý na všechny všechny ostatní vektory $\overrightarrow{x}_j$. Máme tedy

$$\alpha_i \, \overrightarrow{x}_i \cdot \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{o} \cdot \overrightarrow{x}_i = 0.$$

Protože $\overrightarrow{x}_i \cdot \overrightarrow{x}_i$ je nenulové číslo, musí být $\alpha_i = 0$. Tuto operaci můžeme provést pro každý index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takže všechna čísla čísla α_i jsou nutně nulová.

Souřadnice počítané ze skalárního součinu

Věta: Nechť $(B) = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak souřadnice libovolného vektoru $\overrightarrow{x}$ vzhledem k bázi (B) jsou

$$(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_1,\ \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_n).$$

Důkaz: Označme $\overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_1)\, \overrightarrow{b}_1 + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_2)\, \overrightarrow{b}_2 + \cdots + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_n)\, \overrightarrow{b}_n$. Máme dokázat, že $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. Násobme vektor $\overrightarrow{y}$ vektorem $\overrightarrow{b}_i$:

$$\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{b}_i = ((\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_1)\, \overrightarrow{b}_1 + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_2)\, \overrightarrow{b}_2 + \cdots + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_n)\, \overrightarrow{b}_n) \cdot \overrightarrow{b}_i =$$
$$= (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_i)\, \overrightarrow{b}_i \cdot \overrightarrow{b}_i = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_i,$$

protože báze je ortonormální. Je $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b}_i = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{b}_i\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Co, kdyby $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$? Vektor $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$ je kolmý na všechny prvky $\overrightarrow{b}_i$, protože $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{b}_i = 0$. Pak jsou vektory $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$ lineárně nezávislé, ale to je ve sporu s tím, že (B) je báze.

Básnička: čtvrtá dimenze

Jednou v hospodě u Karla čtvrtého,
uviděl jsem kus prostoru čtvrtého.

Čtyři půllitry u stropu nad sálem,
letěly k sobě kolmo navzájem,
což není možné v dimenzi třetí,
kde nejvýše tři půllitry k sobě letí.

Tak poznal jsem díky otci vlasti,
jaké jsou v půllitru skryty slasti.
Jak všem čechům rozšiřuje obzory
o n-dimenzionální prostory.

in: Emil Calda: Říkanky množinově nelogické

Geometrická představa skalárního součinu

Předpokládejme, že vektory $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ jsou orientované úsečky, navíc nechť $\overrightarrow{y}$ má jednotkovou velikost. Sestrojme z koncového bodu vektoru $\overrightarrow{x}$ kolmý průmět na přímku, procházející vektorem $\overrightarrow{y}$. Velikost tohoto kolmého průmětu (je-li na polopřímce společně s vektorem $\overrightarrow{y}$) je skalární součin $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$. Je-li průmět na opačné polopřímce, pak skalární součin je záporný a jeho absolutní hodnota je rovna velikosti průmětu.

Tato geometrická interpretace vychází ze vzorce:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \;=\; \|\overrightarrow{x}\|\,\|\overrightarrow{y}\| \cos\phi.$$

Z tohoto pohledu říká věta ze stránky [13], že souřadnice vektoru jsou průměty vektoru na jednotlivé souřadnicové osy.

Úhly vektoru s osami

Věta: Nechť $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{x}$ vzhledem k ortonormální bázi $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n)$. Pak úhel ϕ_i mezi vektorem $\overrightarrow{x}$ a vektorem $\overrightarrow{b}_i$ má velikost ϕ_i, pro kterou je

$$\cos\phi_i = \frac{x_i}{\|\overrightarrow{x}\|}\,.$$

Důkaz:

$$\cos\phi_i = \frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}_i}{\|\overrightarrow{x}\|\,\|\overrightarrow{b}_i\|} = \frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}_i}{\|\overrightarrow{x}\|} = \frac{x_i}{\|\overrightarrow{x}\|}\,.$$

V úpravách jsme využili toho, že $\|\overrightarrow{b}_i\| = 1$ (báze je ortonormální) a dále předchozí věty, podle které je $x_i = \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}_i$.

Důsledek: $\cos^2\phi_1 + \cos^2\phi_2 + \cdots + \cos^2\phi_n = 1$

Schmidtův ortogonalizační proces

Zhruba: každou konečnou bázi lze „opravit“ tak, aby byla ortonormální. Oprava k-tého vektoru vždy probíhá v lineárním obalu prvních k vektorů. Tj. první vektor opravíme na přímce dané prvním vektorem, druhý vektor opravíme v rovině dané prvními dvěma vektory, atd.

Přesně: Nechť $\{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n\}$ je libovolná báze. Pak existuje ortonormální báze $\{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \ldots, \overrightarrow{c}_n\}$ taková, že

$$\langle \overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_k \rangle = \langle \overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \ldots, \overrightarrow{c}_k \rangle, \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Důkaz: oprava každého vektoru probíhá ve dvou krocích. Vektor se (uvnitř zmíněného lin. obalu) „natočí“ a následně se „normuje“:

$$\overrightarrow{b}'_{k+1} = \overrightarrow{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{b}_{k+1} \cdot \overrightarrow{c}_i)\, \overrightarrow{c}_i, \qquad \overrightarrow{c}_{k+1} = \frac{\overrightarrow{b}'_{k+1}}{\|\overrightarrow{b}'_{k+1}\|}.$$

Ortogonální matice

Předpokládejme v $\mathbf{R}^n$ standardní skalární součin. Matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n,n}$, která ve sloupcích obsahuje nějakou ortonormální bázi prostoru $\mathbf{R}^n$, se nazývá *ortogonální*.

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\mathbf{A}$ je ortogonální,
- $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$,
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$,
- $\mathbf{A}^T$ je ortogonální,
- $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích souřadnice ortonormální báze,
- $\mathbf{A}$ je maticí přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

Další vlastnosti ortogonální matice

- Je-li $\mathbf{A}$ ortogonální, pak $\det \mathbf{A} = 1$ nebo $\det \mathbf{A} = -1$.
- Je-li $\mathbf{A}$ ortogonální a je-li $\mathbf{x}$ sloupcový vektor, pak sloupcový vektor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ má stejnou velikost jako vektor $\mathbf{x}$.
- Součin ortogonálních matic je ortogonální.

První puntík:

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})\,(\det \mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})^2.$$

Druhý puntík:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Třetí puntík:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

QR rozklad

Je-li $\mathbf{A}$ regulární matice, pak existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ a horní trojúhelníková matice $\mathbf{R}$ tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}.$$

Důkaz: Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří nějakou bázi (B). Na tuto bázi provedeme Schmidtův ortogonalizační proces a tím dostaneme ortonormální bázi (C). Zapíšeme ji do sloupců matice $\mathbf{Q}$. Matice $\mathbf{R}$ je maticí přechodu od ortonormální báze (C) k bázi (B). Obsahuje souřadnice vektorů $\overrightarrow{b}_k$ z báze (B) vzhledem k (C). Díky vlastnosti

$$\langle \overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_k \rangle = \langle \overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \ldots, \overrightarrow{c}_k \rangle, \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{b}_k$ vzhledem k (C) pro $i > k$ nulové, takže $\mathbf{R}$ je horní trojúhelníková.