Soustavy lineárních rovnic

- vlastnosti množin řešení
- metody hledání řešení
- nejednoznačnost zápisu řešení

a) soustavy, 10, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Terminologie

Definice: Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{m,n}$ je matice, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m,1}$ je jednosloupcová matice. Maticová rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

s neznámou jednosloupcovou maticí $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n,1}$ nazýváme *soustavou lineárních rovnic* (m rovnic, n neznámých). $\mathbf{A}$ je *matice soustavy*, $\mathbf{b}$ je *sloupec pravých stran*, $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ je *rozšířená matice soustavy*.

Je-li $\mathbf{o} \in \mathbf{R}^{m,1}$ nulový sloupcový vektor, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ je *homogenní soustava lineárních rovnic*.

Řešení soustavy je takový vektor z $\mathbf{R}^n$, který, zapsaný do sloupce místo neznámé matice $\mathbf{x}$, splňuje danou maticovou rovnost.

Úloha: Najít všechna řešení, tj. vymezit podmnožinu $M \subseteq \mathbf{R}^n$ všech řešení soustavy.

Dva pohledy na soustavu lin. rovnic

Pohled po řádcích, tedy po jednotlivých rovnicích. Každá rovnice sama vymezuje podmnožinu všech svých řešení $M_i \subseteq \mathbf{R}^n$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Geometricky je M_i nadrovinou (podprostorem dimenze $n-1$ posunutým z počátku do nějakého jiného bodu). Všechny rovnice mají být splněny současně, hledáme tedy společný *průnik* všech těchto nadrovin M_i.

Pohled po sloupcích. Rozepišme matici soustavy $\mathbf{A}$ do sloupců: $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$. Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ přechází na:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \;=\; (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;=\; x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n \;=\; \mathbf{b}$$

Hledáme tedy koeficienty lineární kombinace sloupců matice $\mathbf{A}$, které zaručí, že se daná kombinace rovná pravé straně $\mathbf{b}$.

K čemu slouží eliminační metoda

Má-li soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ množinu řešení M a je

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \sim (\mathbf{C}\,|\,\mathbf{d})$$

pak soustava $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ má stejnou množinu řešení M.

Když eliminujeme na schodovitou matici $\mathbf{C}$, pak půjde u soustavy $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ hledaná množina řešení M lépe najít.

Frobeniova věta, řešitelnost soustavy

Věta: Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má aspoň jedno řešení právě tehdy, když $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Důkaz: (sloupcový pohled): soustava má řešení právě když vektor $\mathbf{b}$ leží v lineárním obalu sloupcových vektorů $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, což je právě tehdy, když $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$. Využijeme také toho, že hodnost matice není jen dimenze lin. obalu řádků, ale je to také dimenze lineárního obalu sloupců matice, neboť $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{A}^T$.

Důkaz: (eliminační pohled): Po eliminaci na schodovitou matici máme soustavu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ která nemá řešení právě tehdy, když existuje nulový řádek v matici $\mathbf{C}$ s nenulovým číslem na pravé straně. Tj. právě tehdy když $\operatorname{hod} \mathbf{C} \neq \operatorname{hod}(\mathbf{C} \,|\, \mathbf{d})$. Eliminační metoda ovšem nemění hodnost.

Homogenní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$

- Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy nulové řešení.
- Množinou řešení M_0 homogenní soustavy je vždy podprostor :

$$\mathbf{u} \in M_0,\ \mathbf{v} \in M_0, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{Au} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{Av} = \mathbf{o}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}, \quad \text{tj. } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in M_0.$$

$$\mathbf{u} \in M_0,\ \alpha \in \mathbf{R}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{Au} = \mathbf{o}.$$

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \alpha\,\mathbf{o} = \mathbf{o}, \quad \text{tj.} \quad \alpha\,\mathbf{u} \in M_0.$$

Jak vyřešit homogenní soustavu

- Nejprve převedeme eliminací na soustavu se stejnou množinou řešení, ale se schodovitou maticí soustavy:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{o}) \sim (\mathbf{C}\,|\,\mathbf{o})$$

- Každá nenulová rovnice v soustavě $\mathbf{Cx} = \mathbf{o}$ umožní spočítat jednu neznámou (při zpětné substituci zespoda nahoru). Těmto proměnným říkáme *vázané proměnné*. Ostatní (takto nespočítané) proměnné jsou *volné proměnné*, neboli parametry. Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_k$ jsou všechny volné proměnné. Můžeme volit tyto hodnoty za $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$

$$(1, 0, \ldots, 0), \quad (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 1)$$

  a pro každou tuto volbu volných proměnných dopočítáme proměnné vázané. Dostáváme tak lineárně nezávislou množinu řešení, která je bází podprostoru M_0 všech řešení.

Příklad (homogenní soustava)

Řešme soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ s maticí:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vázané proměnné: x_1, x_2, x_4, volné proměnné: x_3, x_5.

Při volbě $x_3 = 1$, $x_5 = 0$ vychází: $x_4 = 0$, $x_2 = -1/2$, $x_1 = -1/2$,
při volbě $x_3 = 0$, $x_5 = 1$ vychází: $x_4 = -3/2$, $x_2 = 7/4$, $x_1 = -33/4$.

Takže mám dvě lineárně nezávislá řešení:

$$(-1/2, -1/2, 1, 0, 0),\ (-33/4, 7/4, 0, -3/2, 1).$$

Všechna řešení tvoří lineární obal těchto dvou řešení:

$$M_0 = \langle(-1, -1, 2, 0, 0),\ (-33, 7, 0, -6, 4)\rangle$$

Dimenze prostoru řešení

- Dimenze prostoru řešení homogenní soustavy je rovna počtu volných proměnných,
- což je rovno počtu všech proměnných minus počtu vázaných proměnných,
- což je rovno počtu všech proměnných minus počtu nenulových rovnic soustavy $\mathbf{Cx} = \mathbf{o}$ se schodovitou maticí,
- což je rovno počtu všech proměnných minus hodnost matice soustavy.

Závěr: Nechť M_0 je množina řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ s m rovnicemi a n neznámými. Pak

$$\dim M_0 = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}.$$

Dva podprostory v $\mathbf{R}^n$ vymezené maticí A

Nechť je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$

- Označme R lineární obal řádků matice $\mathbf{A}$. Je to podprostor v $\mathbf{R}^n$.
- Označme M_0 množinu všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$. Je to rovněž podprostor v $\mathbf{R}^n$. Nazývá se *nulovým prostorem matice* $\mathbf{A}$.
- Do řádků matice $\mathbf{B}$ napišme nějakou bázi prostoru M_0.

Platí:

- Každý vektor z M_0 řeší soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$.
- Každý vektor z R řeší soustavu $\mathbf{Bx} = \mathbf{o}$.
- Je-li $\overrightarrow{u} \in R$ a $\overrightarrow{v} \in M_0$, pak $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^T = 0$.
- $\dim R + \dim M_0 = n = \dim \mathbf{R}^n$

Algoritmus hledání báze nulového prostoru

Algoritmus: Nechť $\mathbf{A} \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{C})$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Pak řádky matice $(-\mathbf{C}^T\,|\,\mathbf{E}')$ obsahují bázi řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$.

Poznámka: $\mathbf{E}'$ je zde také jednotková matice, ovšem obecně jiného typu než matice $\mathbf{E}$.

Důkaz: Řádky matice $(-\mathbf{C}^T\,|\,\mathbf{E}')$ jsou lineárně nezávislé a jejich počet je roven $n - \operatorname{hod}\mathbf{A}$. Takže lin. obal těchto řádků má stejnou dimenzi, jako prostor řešení M_0. Stačí ukázat, že každý řádek matice $(-\mathbf{C}^T\,|\,\mathbf{E}')$ řeší soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$:

$$(\mathbf{E}\,|\,\mathbf{C}) \cdot \left(\frac{-\mathbf{C}}{\mathbf{E}'}\right) = \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{C}) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' = -\mathbf{C} + \mathbf{C} = \mathbf{O}.$$

Poznámka: nelze-li provést $\mathbf{A} \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{C})$, pak je možné dostat $(\mathbf{E}\,|\,\mathbf{C})$ po vhodné permutaci sloupců (změna pořadí neznámých). Zpětnou permutaci sloupců pak provedeme na matici $(-\mathbf{C}^T\,|\,\mathbf{E}')$ a máme hledanou bázi prostoru řešení.

Příklad

Metodou ze slídu [11] vyřešíme soustavu ze slídu [8]. Matici převedeme Gauss-Jordanovou eliminací:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 33/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Prohodíme sloupce a přejdeme od matice $(\mathbf{E}\,|\,\mathbf{C})$ k matici $(-\mathbf{C}^T\,|\,\mathbf{E}')$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_4, & x_3, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 33/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_4, & x_3, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -33/4 & 7/4 & -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Po zpětném prohození sloupců dostáváme v řádcích bázi množiny řešení M_0:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -33/4 & 7/4 & 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nehomogenní soustava lineárních rovnic

Terminologie: Jakékoli řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nazýváme *partikulární řešení* této soustavy.

Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ se nazývá *přidružená homogenní soustava* k soustavě $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Věta: Množina M všech řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je buď prázdná, nebo je tvaru

$$M = \mathbf{v} + M_0$$

kde $\mathbf{v}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a M_0 je množina všech řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$.

Důkaz: Označme $\mathbf{v}$ partikulární řešení a nechť $\mathbf{u} \in M_0$. Stačí ověřit, že $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in M$. Dále musíme ověřit, že pro každé $\mathbf{w} \in M$ existuje $\mathbf{u} \in M_0$ tak, že $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w}$.

Poznámka: Výhodná je geometrická představa, udělejte si náčrtek.

Jak vyřešit nehomogenní soustavu

- Najít jedno partikulární řešení $\mathbf{v}$.
- Vyřešit přidruženou homogenní soustavu, najít M_0.
- Všechna řešení napsat ve tvaru $M = \mathbf{v} + M_0$.

Jediný problém: najít partikulární řešení $\mathbf{v}$. Typický postup:

- Eliminovat $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \sim (\mathbf{C}\,|\,\mathbf{d})$, na soustavu se schodovitou maticí.
- Sloupce s volnými proměnnými odstranit (tj. dosadit za volné proměnné nuly). Vzniká soustava s regulární čtvercovou maticí.
- Dořešit tuto soustavu zpětným chodem eliminace.
- K řešení připsat nuly na místa volných proměnných.

Příklad (nehomogenní soustava)

Soustava ze slídu [8] je doplněna o pravou stranou. Gauss-Jordanovou eliminací upravím rozšířenou matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 33/4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -7/4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Odstraním sloupce odpovídající volným proměným:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1, & x_2, & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Partikulární řešení je $(-3, 2, 0, 1, 0)$ a množina všech řešení je

$$M = (-3, 2, 0, 1, 0) + \langle(-1, -1, 2, 0, 0),\ (-33, 7, 0, -6, 4)\rangle.$$

Problém nejednoznačnosti zápisu řešení

Stejná množina řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se dá vyjádřit různými vektory báze řešení přidružené homogenní soustavy a různými partikulárními řešeními. Jak poznat, že:

$$\overrightarrow{v} + \langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k \rangle = \overrightarrow{w} + \langle \overrightarrow{z}_1, \overrightarrow{z}_2, \ldots, \overrightarrow{z}_k \rangle \,?$$

Stačí porovnat hodnosti následujících matic:

$$\operatorname{hod} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{u}_k \\ \overrightarrow{z}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{z}_k \\ \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v} \end{pmatrix} = \operatorname{hod} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{u}_k \end{pmatrix} = \operatorname{hod} \begin{pmatrix} \overrightarrow{z}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{z}_k \end{pmatrix}$$

Viz též stranu [9] k tématu „matice“.

Soustavy se čtvercovou maticí A

- Je-li matice **A regulární**, pak soustava má jediné řešení.
- Je-li matice **A regulární**, pak lze soustavu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešit vynásobením této rovnosti inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}.$$

- Je-li matice **A regulární**, je možné také provést LU rozklad této matice a řešit jednu soustavu dopřednou substitucí a další zpětnou substitucí. Viz stranu [3] k tématu „LU rozklad“. Je to nepatrně numericky výhodnější než počítat inverzní matici.
- Je-li matice **A regulární** a zajímají nás jen některé složky řešení, je možné použít *Cramerovo pravidlo*, viz následující stranu.
- Je-li **A singulární**, pak po eliminaci $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \sim (\mathbf{C}\,|\,\mathbf{d})$ dostáváme soustavu s maticí **C**, která není čtvercová. Dále je nutné použít postupy uvedené na předchozích stranách.

Cramerovo pravidlo

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice. Pak pro i-tou složku řešení soustavy $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí

$$x_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}\,,$$

kde matice $\mathbf{B}_i$ je shodná s maticí $\mathbf{A}$ až na i-tý sloupec, který je zaměněn za sloupec pravých stran.

Důkaz: Využijeme vztah $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ a zaměříme se v maticovém součinu na výpočet i-tého řádku v matici $\mathbf{x}$. Přitom matici $\mathbf{A}^{-1}$ zapíšeme pomocí doplňků. Viz stranu [19] k tématu „determinant“.

Příklad

Vyřešíme soustavu s parametrem $p \in \mathbf{R}$, která má rozšířenou matici:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -p & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & p & -1 \end{array}\right)$$

Je $\det \mathbf{A} = (p-2)(p-17)$. Takže pro $p = 17$ nebo $p = 2$ je matice soustavy singulární:

$$p = 17: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -17 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 17 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ldots\ M = \emptyset$$

$$p = 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \ldots$$

$$\ldots\ M = (5/3, 0, 1/3) + \langle (1, 3, -4) \rangle$$

Příklad (pokračování)

Pro $p \neq 17$ a $p \neq 2$ je matice soustavy regulární a soustava má jediné řešení. Najdeme toto řešení pomocí Cramerova pravidla.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -p & -1 \\ 0 & -7 & -5 \\ -1 & 3 & p \end{pmatrix} = -26(p-2), \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & p \end{pmatrix} = -3(p-2)$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -p & 3 \\ 1 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -(p-2).$$

Protože $\det \mathbf{A} = (p-2)\,(p-17)$, je:

$$x_1 = \frac{-26(p-2)}{(p-2)\,(p-17)} = \frac{26}{17-p}, \quad x_2 = \frac{3}{17-p}, \quad x_3 = \frac{1}{17-p}.$$

Pro případ $p \neq 17$ a $p \neq 2$ obsahuje množina M jediné řešení:

$$M = \left\{ \left(\frac{26}{17-p}, \frac{3}{17-p}, \frac{1}{17-p} \right) \right\}.$$

Maticová rovnice AX = B

- Je-li **A** regulární matice, pak rovnice má jediné řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.
- Jinak stačí matice **X** a **B** rozepsat do sloupců:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_k), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2\ \ldots\ \mathbf{B}_k),$$

  takže maticová rovnice přechází na k soustav lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2, \quad \ldots\mathbf{A}\,\mathbf{X}_k = \mathbf{B}_k.$$

  Tyto soustavy mají společnou matici soustavy, tj. společnou přidruženou homogenní soustavu, tj. společnou množinu M_0 všech řešení přidružené homogenní soustavy. Pro každou soustavu zvlášť je třeba spočítat partikulární řešení.

- Množina všech řešení je množina všech matic **X**, které mají ve sloupcích odpovídající partikulární řešení, ke kterým je v každém sloupci (nezávisle) přičtena množina řešení M_0.