

Polynomy

Polynom je možno definovat dvěma způsoby:

- jako reálnou nebo komplexní funkci, jejichž hodnoty jsou dány jistým vzorcem,
- jako ten vzorec samotný.

První způsob zavedení polynomu

Definice 1: *Polynom* je komplexní funkce $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, pro kterou existují komplexní čísla a_0, a_1, \dots, a_n taková, že

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

pro všechna $x \in \mathbf{C}$.

Čísla a_0, a_1, \dots, a_n nazýváme *koeficienty polynomu*.

Dále zavádíme pojmy:

Rovnost polynomů jako rovnost funkcí:

$p = q$, když $p(x) = q(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$.

Součet polynomů, násobek polynomu jako součet a násobek funkcí:

$p + q$ je funkce, pro kterou $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$,

αp je funkce, pro kterou $(\alpha p)(x) = \alpha \cdot p(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$.

Druhý způsob zavedení polynomu

Definice 2: *Polynom* je vzorec tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n jsou komplexní čísla a x je formální proměnná.

Čísla a_0, a_1, \dots, a_n nazýváme *koeficienty polynomu*.

Hodnota polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ v bodě $\alpha \in \mathbf{C}$ je komplexní číslo, které dostaneme dosazením čísla α za proměnou x do uvedeného vzorce.

Dále zavádíme pojmy:

Rovnost polynomů: Dva polynomy se rovnají, pokud současně platí

- koeficienty se stejnými indexy se rovnají,
- má-li jeden polynom koeficient, který druhý polynom nemá, pak tento koeficient je nulový.

Součet polynomů, násobek polynomu: jako součet příslušných vzorců a násobek vzorce konstantou. Přesněji:

Má-li polynom p koeficienty a_0, a_1, \dots, a_m a má-li polynom q koeficienty b_0, b_1, \dots, b_n a je $m \leq n$, pak polynom $p + q$ má koeficienty

$$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m, b_{m+1}, \dots, b_n.$$

Dále polynom αp má koeficienty $\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_m$.

Výsledky operací jsou tedy popsány pomocí svých koeficientů *algoritmicky*. Na vstupu do algoritmu jsou koeficienty polynomů, které sčítáme resp. násobíme. S proměnnou x algoritmy nepracují.

Součin polynomů

Součin dvou polynomů p a q , které mají koeficienty a_0, a_1, \dots, a_m a b_0, b_1, \dots, b_n , je polynom, který má koeficienty c_0, c_1, \dots, c_{m+n} takové, že

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0,$$

přičemž v tomto vzorci klademe $a_i = 0$ pro $i > m$ a $b_i = 0$ pro $i > n$.

Jak jsme na to přišli?

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) = \\ & = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \\ & \quad + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + \\ & \quad + (a_0b_{m+n} + a_1b_{m+n-1} + \dots + a_mb_n + \dots + a_{m+n}b_0)x^{m+n}. \end{aligned}$$

Vztah mezi funkcí a koeficienty

Jaký je vztah mezi prvním a druhým způsobem pojetí polynomu?

Tj. mezi polynomem jako *funkcí* a polynomem jako *vzorcem* charakterizovaným svými *koeficienty*?

Tvrzení:

- Polynom daný koeficienty jednoznačně určuje funkci podle definice 1.
- Polynom jako funkce má své koeficienty určeny jednoznačně (až na „přebývajících“ nulové koeficienty).

První část tvrzení je zřejmá. Vzorec určuje funkci.

Druhá část tvrzení není zcela zřejmá. K jejímu důkazu použijeme pomocnou větu:

Věta: nulová funkce je polynom, který musí mít všechny koeficienty nulové.

Důkaz: Necht' $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$, Koeficient a_0 musí být nulový (stačí dosadit $x = 0$). Takže platí $p(x) = x(a_n x^{n-1} + \dots + a_1) = xq(x) = 0$. Polynom q je nulový pro všechna $x \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Protože q je funkce spojitá, je také $q(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ dostáváme $a_1 = 0$ a postup můžeme opakovat. Dostaneme $a_2 = 0, \dots, a_n = 0$.

Vraťme se k tvrzení: Polynom jako funkce má své koeficienty určeny jednoznačně.

Důkaz: Ať polynom p (jako funkce) má koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n a také ať má koeficienty b_0, b_1, \dots, b_n (koeficienty doplníme nulami, kdyby původně měl být počet koeficientů různý). Funkce $p - p$ je nulová a má zřejmě koeficienty $a_0 - b_0, a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n$. Podle předchozí věty musejí být tyto koeficienty nulové, takže musí být $a_i = b_i$ pro všechna i . Nemůže se tedy stát, aby měl jeden polynom (jako funkce) dvě sady různých koeficientů.

Stupeň polynomu

Definice: polynom se všemi koeficienty nulovými se nazývá *nulový polynom*.

Stupeň polynomu p s koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n je největší index i takový, že $a_i \neq 0$. Stupeň nulového polynomu definujeme hodnotou -1 .

Stupeň polynomu p značíme $\text{St } p$

Pozorování: Pro nenulové polynomy p a q platí:

$$\text{St}(p + q) \leq \max(\text{St } p, \text{St } q), \quad \text{St}(p \cdot q) = \text{St } p + \text{St } q$$

Dělení polynomu polynomem se zbytkem

Věta: Pro polynomy p a q (polynom q nenulový) existují polynomy r a z takové, že

- $p = r \cdot q + z$, (neboli $p/q = r + z/q$),
- $\text{St}z < \text{St}q$.

Polynomu r říkáme *částečný podíl* a polynomu z říkáme *zbytek* při dělení polynomu p polynomem q .

Platnost věty je zaručena existencí algoritmu, který pro každé p , q vytvoří r a z uvedených vlastností.

Algoritmus (příklad):

$$\begin{array}{r}
 (2x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x + 8) : (x^2 - 2x + 4) = 2x^3 + x^2 - 3x - 11 \\
 -(2x^5 - 4x^4 + 8x^3) \\
 \hline
 x^4 - 5x^3 - x^2 - 6x + 8 \\
 -(x^4 - 2x^3 + 4x^2) \\
 \hline
 -3x^3 - 5x^2 - 6x + 8 \\
 -(-3x^3 + 6x^2 - 12x) \\
 \hline
 -11x^2 + 6x + 8 \\
 -(-11x^2 + 22x - 44) \\
 \hline
 -16x + 52
 \end{array}$$

Algoritmus (náčrt):

$$\begin{array}{r}
 p \\
 -c_k x^k \cdot q \\
 \hline
 p - c_k x^k \cdot q \\
 -c_{k-1} x^{k-1} \cdot q \\
 \hline
 p - c_k x^k \cdot q - c_{k-1} x^{k-1} \cdot q \\
 \dots \\
 \hline
 p - (c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_0) \cdot q = p - r q = z
 \end{array}
 \quad : \quad q = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_0$$

Algoritmus:

- vždy skončí po konečně mnoha krocích,
 - vyprodukuje polynomy r a z , které mají vlastnosti podle věty.
- (rozmyslete si, proč)

Jednoznačnost částečného podílu a zbytku

Polynomy r a z s vlastnostmi podle předchozí věty jsou určeny výchozími polynomy p a q jednoznačně.

Důkaz: Ať kromě r a z ještě polynomy r_1 a z_1 mají uvedené vlastnosti, tj.

$$p = r \cdot q + z = r_1 \cdot q + z_1, \quad \text{St } z < \text{St } q, \quad \text{St } z_1 < \text{St } q.$$

Po odečtení první rovnosti je $(r - r_1)q = z_1 - z$. Stupeň na pravé straně je menší než q , takže na levé straně musí být q násobeno nulou. Tj. $r = r_1$. Z toho také plyne, že $z = z_1$.

Hornerovo schéma =

= algoritmus na efektivní vyhodnocení polynomu v daném bodě.

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = \\ &= ((\cdots ((a_n \alpha + a_{n-1}) \alpha + a_{n-2}) \alpha + \cdots + a_2) \alpha + a_1) \alpha + a_0. \end{aligned}$$

Mezivýpočty (závorky) mohou zůstat v registru procesoru.

Odhadněte počet násobení a sčítání při vyhodnocení polynomu stupně n v bodě

- a) přímo pomocí vzorce z definice polynomu
- b) podle Hornerova schématu

Tři řádky Hornerova schématu

Při psaní mezivýpočtů na papír můžeme použít třířádkové schéma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 \alpha : & & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} & \dots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
 \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & p(\alpha)
 \end{array}$$

kde $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + \alpha b_k$ pro $k = n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 1$.

Vyplatí se to, protože platí následující tvrzení ...

Tvrzení: třetí řádek Hornerova schématu obsahuje koeficienty b_i , což jsou koeficienty polynomu r , pro který platí:

$$p(x) = r(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$$

tedy: r je částečný podíl polynomu p polynomem $(x - \alpha)$.

Důkaz: je třeba využít rekurentních vztahů

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{k-1} = a_k + \alpha b_k$$

a propočítat výraz $r(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$.

K čemu to je: nemusíme pro výpočet částečného podílu polynomu polynomem stupně prvního používat algoritmus ze slídu [12].

Kořen polynomu

Definice: *Kořen polynomu* p je takové číslo $\alpha \in \mathbf{C}$, pro které je $p(\alpha) = 0$.

Jinými slovy: kořen je číslo, ve kterém má polynom nulovou hodnotu.

Definice: *Kořenový činitel polynomu* p je polynom tvaru $x - \alpha$, kde α je kořen polynomu p .

Pozorování: Polynom je dělitelný svým kořenovým činitelem.

Důkaz: Částečný podíl polynomu p kořenovým činitelem $(x - \alpha)$ musí mít stupeň zbytku menší než 1, takže zbytek je konstanta z . Takže

$$p(x) = r(x) \cdot (x - \alpha) + z.$$

Po dosazení $x = \alpha$ dostáváme $0 = p(\alpha) = r(\alpha) \cdot 0 + z$, takže $z = 0$.

Základní věta algebry

Věta: Každý polynom stupně aspoň prvního má v \mathbf{C} kořen.

Poznámka: Polynom stupně nula je nenulová konstanta, tj. nemá kořen.

Pozorování: Třebaže má polynom stupně aspoň prvního reálné koeficienty, nemusí mít žádný reálný kořen. Například polynom $x^2 + 1$. Základní věta algebry praví, že polynom má *komplexní*, kořen.

Důkaz základní věty algebry: neuvádíme.

Rozklad polynomu na kořenové činitele

Nechť p je polynom stupně aspoň prvního. Pak má kořen α_1 a je dělitelný kořenovým činitelem $x - \alpha_1$, tedy $p = (x - \alpha_1) \cdot p_1(x)$. Polynom p_1 má stupeň o jeden menší, než stupeň p .

Nechť p_1 je polynom stupně aspoň prvního. Pak má kořen α_2 a je dělitelný činitelem $x - \alpha_2$, tedy $p = (x - \alpha_1) \cdot p_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot p_2(x)$. Polynom p_2 má stupeň o dva menší, než stupeň p .

Opakovaným postupem této úvahy dostáváme

$$p = (x - \alpha_1) \cdot p_1(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \cdot K,$$

kde $K = p_n$ je polynom stupně nultého (nenulová konstanta).

Tomuto vzorci se říká *rozklad polynomu p na kořenové činitele*.

Násobnost kořene

Pozorování: Všechna čísla α_i v předchozím vzorci (v rozkladu na kořenové činitele) jsou kořeny polynomu p .

Pozorování: Počet kořenových činitelů v předchozím vzorci je roven stupni polynomu.

Definice: *Násobnost* kořene α je počet výskytů čísla α v kořenových činitelích v rozkladu na kořenové činitele.

Pozorování: Každý polynom má tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Každý kořen ovšem započítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Pozorování: Konstanta K v rozkladu na kořenové činitele je rovna koeficientu a_n .

Nalézt rozklad na kořenové činitele

není algebraicky pro obecný polynom p možné.

Při hledání rozkladu je totiž potřeba najít všechny kořeny polynomu p na základě znalosti jeho koeficientů. Vzorce existují pro polynomy stupně 1, 2, 3, 4 a dále pro některé speciální polynomy.

Příklad: Pro polynom stupně 2 vzorce pro kořeny jistě znáte:

$$\alpha_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad \alpha_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Pro polynomy stupně pátého a vyššího algebraické vzorce *neexistují*. Pomocí teorie grup Niels Abel a Évartiste Galois dokázali, že tyto vzorce skutečně neexistují (tj. je dokázáno, že vzorce ani v budoucnu nikdo objeví).

To není ve sporu se základní větou algebry, která říká, že kořen existuje (zdůvodněte proč).

Speciální případ: kořeny jsou celá čísla

Jsou-li koeficienty polynomu celočíselné, pak je možno vyzkoušet, zda nepůjde nalézt kořen mezi děliteli koeficientu a_0 . Těch je konečně mnoho. Pokud mezi nimi kořen nenalezneme, nemáme sice rozklad, ale máme aspoň jistotu, že polynom nemá další celočíselné kořeny. Platí totiž:

Věta: Je-li α celočíselný kořen polynomu p s celočíselnými koeficienty, pak α dělí koeficient a_0 .

Důkaz: V rovnosti $0 = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$ (která plyne z toho, že α je kořen) odečteme z obou stran a_0 a ze zbytku vytkneme α . Dostáváme $a_0 = -\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_1) = \alpha \cdot c$, kde c je celé číslo. Takže α dělí a_0 .

Příklad

Rozložíme $p(x) = x^5 - 12x^4 + 48x^3 - 62x^2 - 33x + 90$. Má-li být kořenem celé číslo, může to být jedině dělitel devadesátky, tedy čísla $1, 2, 3, 5, 6, \dots, 90, -1, -2, -3, \dots, -90$. Těchto konečně mnoho čísel můžeme zkusit dosadit do polynomu. Vychází např. $p(2) = 0$, takže 2 je kořen. Další kořeny stačí hledat v polynomu $p_1(x) = p(x)/(x-2)$. Koeficienty tohoto polynomu najdeme ve třetím řádku Hornerova schématu. Je $p_1(x) = x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 6x - 45$. Tento polynom má kořen 3 a $p_2(x) = p(x)/((x-2)(x-3)) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$. Trojka je znovu kořen polynomu p_2 a $p_3(x) = p(x)/((x-2)(x-3)^2) = x^2 - 4x - 5$. Tento kvadratický polynom má kořeny 5 a -1 . Rozklad daného polynomu je: $p(x) = (x-2)(x-3)^2(x-5)(x+1)$.

Jiný příklad: rozklad polynomu $x^5 - 12x^4 + 48x^3 - 62x^2 - 33x + 91$ nelze algebraicky nalézt. Dělitele 91 jsou $1, 7, 13, 91, -1, -7, -13, -91$. Můžeme zjistit, že žádné z těchto čísel není kořen, takže polynom nemá celočíselné kořeny.

Komplexně sdružené kořeny

Polynomy s reálnými koeficienty ne vždy mají jen reálné kořeny. Komplexní kořeny se ovšem v takovém případě vyskytují v párech:

Tvrzení: Je-li $\alpha \in \mathbf{C}$ kořen polynomu p s reálnými koeficienty, pak $\bar{\alpha}$ (komplexně sdružené číslo k číslu α) je také kořen polynomu p , dokonce stejné násobnosti.

Proč je $\bar{\alpha}$ kořen? Platí

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= a_0 + a_1 \bar{\alpha} + a_2 \bar{\alpha}^2 + \cdots + a_n \bar{\alpha}^n = \\ &= \overline{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n} = \\ &= \overline{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Proč mají α a $\bar{\alpha}$ stejnou násobnost? Součin $(x - \alpha) \cdot (x - \bar{\alpha})$ je polynom s reálnými koeficienty (propočítejte si to).

Reálný rozklad

Dvojici kořenových činitelů $(x - \alpha)$ a $(x - \bar{\alpha})$ můžeme roznásobit a dostáváme kvadratický polynom s reálnými koeficienty

$$(x - \alpha) \cdot (x - \bar{\alpha}) = x^2 + \beta x + \gamma.$$

Nahradíme-li všechny takové páry kořenových činitelů jejich součiny, dostáváme v případě polynomu s reálnými koeficienty:

- součin kořenových činitelů s reálnými kořeny násobený
- součinem kvadratických polynomů, které nemají reálné kořeny.

Reálný rozklad má obecně tvar

$$p(x) = c \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)$$

Reálný rozklad s násobnostmi

Zapíšeme-li v reálném rozkladu vícenásobné kořenové činitele pomocí mocnin a stejně tak opakované kvadratické polynomy pomocí mocnin, dostáváme rozklad:

$$p(x) = c (x - \alpha_1)^{u_1} \cdots (x - \alpha_k)^{u_k} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{v_1} \cdots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{v_m}$$

Takový rozklad se často používá,

- aby se výpočet obešel bez použití komplexních čísel a
- aby explicitně počítal s možností výskytu vícenásobných kořenů (např. integrál racionální lomené funkce).

Parciální zlomky

Věta: Nechť $\text{St } p < \text{St } q$ a α je k násobným kořenem polynomu q . Označme $q = (x - \alpha)^k \cdot q_1$. Pak existuje $a \in \mathbf{C}$ a polynom p_1 takový, že $\text{St } p_1 < \text{St } q - 1$ a

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x - \alpha)^k} + \frac{p_1(x)}{(x - \alpha)^{k-1}q_1(x)} \quad \forall x \in \mathbf{C} \text{ takové, že } q(x) \neq 0$$

Důkaz: Protože α je k -násobným kořenem q , platí $q_1(\alpha) \neq 0$. Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s $p(x) = a \cdot q_1(x) + p_1(x) \cdot (x - \alpha)$. Po dosazení $\alpha \rightarrow x$ je $p(\alpha) = a \cdot q_1(\alpha)$, tj. $a = p(\alpha)/q_1(\alpha)$. Polynom $p(x) - a \cdot q_1(x)$ má stupeň nejvýše roven $\max(\text{St } p, \text{St } q_1)$ a má kořen α . Dělení jeho kořenovým činitelem vychází tedy beze zbytku a výsledkem dělení je polynom p_1 . Jeho stupeň je tedy aspoň o jedničku menší než $\max(\text{St } p, \text{St } q_1)$ a je tedy menší než $\text{St } q - 1$.

Rozklad na parciální zlomky

je důsledek předchozí věty:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x - \alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(x - \alpha)} + \frac{p_2(x)}{q_1(x)} = \\ &= \sum_{i=1}^{k_1} \frac{a_{i,k_1}}{(x - \alpha_1)^i} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{a_{i,k_2}}{(x - \alpha_2)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{k_u} \frac{a_{i,k_u}}{(x - \alpha_r)^i} \end{aligned}$$

Reálný rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{i=1}^{k_1} \frac{a_{i,k_1}}{(x - \alpha_1)^i} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{a_{i,k_2}}{(x - \alpha_2)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{k_u} \frac{a_{i,k_u}}{(x - \alpha_r)^i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1} \frac{b_{i,m_1}x + c_{i,m_1}}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^i} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{b_{i,m_2}x + c_{i,m_2}}{(x^2 + \beta_2x + \gamma_2)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_v} \frac{b_{i,m_v}x + c_{i,m_v}}{(x^2 + \beta_sx + \gamma_s)^i} \end{aligned}$$

Polynom nad tělesem

Číselné obory \mathbf{Q} , \mathbf{R} a \mathbf{C} jsou příklady takzvaných *těles* (o tom promluvíme podrobněji později). Těleso zde značím písmenem T .

Pokud polynom má koeficienty jen z T a definiční obor je také z T (tj. za formální proměnnou x dosazujeme jen čísla z T), pak hovoříme o *polynomu nad tělesem T* .

Definice: Polynom p nad tělesem T je *irreducibilní v T* , pokud jej není možné rozložit na součin polynomů r, s nad T stupně aspoň prvního. Takže nemůže platit $p = r \cdot s$.

Pokud je možné polynom výše zmíněným způsobem rozložit, říkáme mu *reducibilní v T* .

Příklad: Polynom $x^2 + 1$ je ireducibilní v \mathbf{R} .

Příklad: Polynom $x^2 + 1$ je reducibilní v \mathbf{C} , protože

$$x^2 + 1 = (x + i) \cdot (x - i).$$

Příklad: V \mathbf{C} jsou ireducibilní pouze polynomy stupně nejvýše prvního. To zaručuje základní věta algebry.

Příklad: Polynom $x^2 - 2$ je ireducibilní v \mathbf{Q} , ale je reducibilní v \mathbf{R} i \mathbf{C} , protože $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$ a to jsou polynomy stupně aspoň prvního nad \mathbf{R} i nad \mathbf{C} , ale ne nad \mathbf{Q} .

Příklad: Rozklad na kořenové činitele je rozklad na součin ireducibilních polynomů v \mathbf{C} .

Příklad: Reálný rozklad je rozklad na součin ireducibilních polynomů v \mathbf{R} .