

## Teoretické otázky ke zkoušce z předmětu BI-LIN (lineární algebra)

V odpovědích na tyto otázky je nutné přesně definovat použité pojmy a na základě těchto definic odvodit resp. dokázat, co se žádá.

### Polynomy

1. Proč kořenový činitel dělí polynom beze zbytku.
2. Proč celočíselný kořen polynomu s celočíselnými koeficienty dělí  $a_0$ .
3. Dokažte, že ke každému kořenu polynomu s reálnými koeficienty existuje kořen komplexně sdružený.
4. Proč ke každým dvěma polynomům  $p, q$  ( $q$  nenulový) je určen částečný podíl a zbytek jednoznačně?
5. Nechť má polynom  $a_n = 1$  a má jen reálné nebo po dvou komplexně sdružené kořeny. Proč pak má všechny koeficienty reálné?
6. Proč polynom lichého stupně s reálnými koeficienty musí mít alespoň jeden reálný kořen?
7. Proč nemůže mít polynom stupně  $n$  více než  $n$  vzájemně různých kořenů?
8. Proč je polynom stupně  $n$  určen jednoznačně svými hodnotami v  $n + 1$  různých bodech?
9. Jak vypadá rozklad na ireducibilní polynomy polynomu  $x^2 - 2$  nad  $\mathbf{R}$ , nad  $\mathbf{Q}$ , nad  $\mathbf{C}$ , nad  $\mathbf{Z}_3$ .

### Lineární prostor

10. Odvoďte z axiomů linearit (v definici lineárního prostoru) vlastnosti: a)  $x + o = x$ , b)  $\alpha o = o$  pro  $x$  libovolný prvek lineárního prostoru,  $o$  nulový prvek a  $\alpha \in \mathbf{R}$ .
11. Ověřte podrobně, že  $\mathbf{R}^n$  s obvyklým  $+$ ,  $\cdot$  tvoří lineární prostor.
12. Ukažte, že množina nekonečných posloupností s  $+$  a  $\cdot$  definovaným „po složkách“ tvoří LP.
13. Proč je množina všech posloupností s limitou  $= 0$  lineárním podprostorem LP všech posloupností?
14. Proč množina  $M = \{(a, b, c, d), |a| = |b|, |c| = |d|\}$  není podprostorem  $\mathbf{R}^4$ ?
15. Zdůvodněte, proč průnik lineárních podprostorů je lineární podprostor a sjednocení lineárních podprostorů nemusí být lineární podprostor.

### Lineární závislost, obal

16. Zdůvodněte podrobně z axiomů linearit, proč triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.
17. Proč přítomnost nulového vektoru ve skupině vektorů zaručuje lineární závislost této skupiny?
18. Podrobně zdůvodněte, proč v lineárním prostoru reálných funkcí reálné proměnné jsou funkce  $f, g, h$  dané vzorci  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x^2$  a  $h(x) = 1$  jsou lineárně nezávislé.
19. Dokažte větu: vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje jeden, který je lineární kombinací ostatních.
20. Předpokládejte konečnou neprázdnou lineárně závislou množinu vektorů  $M$ . Zdůvodněte, proč přidáním vektoru k množině  $M$  vznikne lineárně závislá množina.
21. Předpokládejte konečnou aspoň dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů  $M$ . Zdůvodněte, proč odebráním vektoru z množiny  $M$  vznikne lineárně nezávislá množina.
22. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč lineární závislost není ovlivněna pořadím vektorů.
23. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč skupina vektorů, v níž se nějaký vektor opakuje, je lineárně závislá.
24. Definujte lineární obal i pro nekonečné množiny. Zdůvodněte, proč  $z \in \langle M \rangle$  právě tehdy, když existuje konečné mnoho vektorů z  $M$  tak, že  $z$  je jejich lineární kombinací.
25. Dokažte  $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$ .
26. Proč je množina vektorů  $M$  lineárním podprostorem právě tehdy, když je  $\langle M \rangle = M$ ?
27. Proč je lineární obal jakékoli množiny podprostor?
28. Zdůvodněte, proč je lineární obal množiny  $M$  nejmenším podprostorem, který obsahuje  $M$ .
29. Předpokládejte  $N$  lineárně nezávislou množinu a  $z \notin \langle M \rangle$ . Dokažte, že přidáním vektoru  $z$  k  $N$  zůstává tato množina lineárně nezávislá.

### Báze

30. Popište postup, jakým lze (v lineárním prostoru s konečnou dimenzí) doplnit libovolnou lineárně nezávislou množinu  $N$  na bázi.
31. Zdůvodněte, proč lze z lineárně závislé množiny  $M$  odebrat vektor tak, že lineární obal zmenšené množiny je stejný jako lineární obal původní množiny  $M$ .

32. Zformulujte (bez důkazu) Steintzovu větu o výměně a vysvětlete její využití v důkaze tvrzení, že každé dvě báze stejného lineárního prostoru mají stejný počet prvků.
33. Proč lineárně nezávislá množina vektorů nemůže mít více prvků, než dimenze lineárního prostoru těchto vektorů?
34. V lineárním prostoru  $L$  uvažujte množinu  $M$ , která má více prvků, než  $\dim L$ . Proč musí být  $M$  lineárně závislá?
35. Dokažte, že pokud má množina  $M$  stejně prvků, jako je  $\dim L$ , pak je lineárně nezávislá právě tehdy, když  $\langle M \rangle = L$ .
36. Zdůvodněte, proč množina  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů.
37. Podrobně zdůvodněte, proč množina polynomů  $\{x^2 + 1, x, x - 1\}$  tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně.
38. Definujte pojem souřadnice vzhledem k uspořádané bázi. Zdůvodněte existenci a jednoznačnost souřadnic.
39. Proč jsou souřadnice polynomu vzhledem ke standardní bázi lin. prostoru polynomů nejvýše  $n$ -tého stupně rovny koeficientům tohoto polynomu?
40. Proč jsou souřadnice vektoru z  $\mathbf{R}^n$  vzhledem ke standardní bázi rovny složkám tohoto vektoru?

### Matice

41. Proč matice typu  $(m, n)$  tvoří lineární prostor? Jakou má tento prostor dimenzi?
42. Proč GEM nemění lineární obal řádků?
43. Jak GEM slouží k výpočtu hodnoty matice? Popište metodu a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně počítá hodnotu matice.
44. Popište metodu ověření lineární závislosti vektorů z  $\mathbf{R}^n$  eliminací matice, ve které jsou tyto vektory zapsány po řádcích. Jak tato metoda souvisí s definicí lineární závislosti?
45. Definujte maticové násobení. Proč čtvercová matice  $A$  komutuje s  $A^2$ ?
46. Dokažte asociativitu maticového násobení a maticového násobku.
47. Zdůvodněte, proč maticové násobení nemusí být komutativní ani pro čtvercové matice.
48. Rozdělte matici  $A$  a  $B$  do čtyř bloků a uveďte vzorec na výpočet maticového součinu pomocí součinů bloků.
49. Uveďte ideu Strassenova algoritmu (konkrétní vzorce není nutné si pamatovat). Odvoďte složitost Strassenova algoritmu.
50. Proč má schodovitá matice všechny nenulové řádky lineárně nezávislé?
51. Zdůvodněte, proč matice komutující s pevně danou maticí tvoří lineární podprostor.
52. Proč je součin regulárních matic regulární?
53. Čím je zaručena jednoznačnost inverzní matice?
54. Popište metodu výpočtu inverzní matice eliminací a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně dává inverzní matici.
55. Vynásobíme-li matici  $A$  regulární maticí, pak se matice  $A$  může změnit, ale nezmění se její hodnota. Proč?
56. Co víme o hodnotě součinu matic, když známe hodnoty jednotlivých činitelů? Zdůvodněte.
57. Jak souvisí LU rozklad s Gaussovou eliminační metodou?

### Determinant

58. Definice determinantu.
59. Zdůvodněte z definice základní vlastnosti determinantu.
60. Proč přičtení násobku řádku k jinému nezmění hodnotu determinantu?
61. Formulujte (bez důkazu) větu o rozvoji determinantu podle řádku/sloupce.
62. Z věty o determinantu součinu (bez důkazu) odvoďte vzorec pro determinant inverzní matice.
63. Zformulujte a dokažte větu na výpočet inverzní matice pomocí doplňků.

### Soustavy lineárních rovnic

64. Frobeniova věta, přesná formulace, význam, důkaz.
65. Definice pojmu řešení soustavy lineárních rovnic.
66. Proč množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří lineární podprostor?

67. Necht  $v$  je jedno řešení soustavy lineárních rovnic. Proč všechna ostatní řešení této soustavy jsou ve tvaru součtu  $v + u$ , kde  $u$  je nějaké řešení homogenní soustavy přidružené k dané soustavě?
68. Zformulujte a dokažte Cramerovu větu.
69. Necht  $M = v + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ ,  $M' = v' + \langle u'_1, \dots, u'_k \rangle$ . Navrhněte a zdůvodněte postup, podle kterého poznáte, že  $M = M'$ .
70. Jakou dimenzi má prostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic a proč?
71. Předpokládejte standardní skalární součin v  $\mathbf{R}^n$ . Zdůvodněte, proč jsou všechny nenulové vektory z lineárního obalu řádků kolmé na všechny vektory řešení homogenní soustavy  $Ax = o$ .
72. Je dána báze množiny řešení  $M_0$  a partikulární řešení  $v$ . Navrhněte postup, jak z těchto informací sestavit nějakou matici  $A$  a pravou stranu  $b$ , pro kterou je  $v + M_0$  množina řešení soustavy  $Ax = b$ .
73. Popište, jak řešit maticovou rovnici  $AX = B$ , kde  $A$  nemusí být regulární a matice  $X$ ,  $B$  mohou obsahovat více než jeden sloupec.

### Lineární zobrazení

74. Charakterizujte lineární zobrazení, vysvětlete princip superpozice.
75. Definujte jádro, defekt a hodnotu lineárního zobrazení.
76. Jak dodefinujeme lineární zobrazení na celém prostoru, když jsou známy jeho hodnoty na bázi? Proč je toto rozšíření jednoznačné?
77. Necht  $a : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení. Jak souvisí defekt  $a$ , hodnota  $a$  s  $\dim L_1$  a  $\dim L_2$ ?
78. Izomorfismus lineárních prostorů. Proč jsou dva lineární prostory shodné konečné dimenze vzájemně izomorfní?
79. Necht  $L$  má konečnou dimenzi. Proč je zobrazení, které přiřadí vektoru  $z \in L$  jeho souřadnice vzhledem k nějaké bázi izomorfismus?
80. Definice, existence a jednoznačnost matice lineárního zobrazení.
81. Vysvětlete, proč platí  $Ax = y$ , kde  $A$  je matice lineárního zobrazení  $a : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $x$  jsou souřadnice vektoru  $u \in L_1$  a  $y$  jsou souřadnice vektoru  $a(u)$ .
82. Zdůvodněte, proč hodnota lineárního zobrazení je rovna hodnotě matice tohoto zobrazení.
83. Jak se změní souřadnice vektoru vzhledem k bázi, pokud tuto bázi změním?
84. Jak se změní matice zobrazení vzhledem k bázím, pokud tyto báze změním?
85. Uveďte matice vzhledem k homogenním souřadnicím: otočení, změna měřítka, posunutí.

### Vlastní čísla, vlastní vektory

86. Definujte vlastní číslo matice/zobrazení a vlastní vektor matice/zobrazení.
87. Proč mají podobné matice stejná vlastní čísla?
88. Definujte charakteristický polynom matice a zdůvodněte, proč jeho kořeny jsou vlastními čísly matice.
89. Vysvětlete, proč matice, která má pouze jednonásobná vlastní čísla, je podobná s diagonální maticí.
90. Proč je matice singulární právě tehdy, když má nulu jako vlastní číslo?

### Lineární prostory se skalárním součinem

91. Vyjmenujte axiomy skalárního součinu a vysvětlete, proč standardní skalární součin na  $\mathbf{R}^n$  tyto axiomy splňuje.
92. Jak je možné na základě skalárního součinu definovat velikost vektoru (normu vektoru) a úhel mezi dvěma vektory?
93. Proč platí Schwartzova a trojúhelníková nerovnost?
94. Popište, jak se počítá skalární součin dvou vektorů, známe-li jejich souřadnice vzhledem k ortonormální bázi. Vzorec zdůvodněte.
95. Proč nenulové vektory navzájem na sebe kolmé jsou lineárně nezávislé?
96. Necht  $(B) = (b_1, \dots, b_n)$  je ortonormální báze lineárního prostoru  $L$ . Proč je  $i$ -tá souřadnice vektoru  $x \in L$  vzhledem k této bázi rovna skalárnímu součinu  $x \cdot b_i$ ?
97. Vysvětlete podstatu a smysl Schmidtova ortogonalizačního procesu.
98. Jak souvisí QR rozklad regulární matice s ortogonalizačním procesem?

### Eukleidovské prostory

99. Proč je možné vše, co rýsujeme v rovině pravítkem a kružítkem, spočítat analyticky?

100. Uveďte možné popisy přímek a rovin.
101. Jak zjistíme vzájemné vztahy přímek, přímky a roviny, rovin?
102. Proč determinat počítá objem (není nutný přesný důkaz). Co nám řekne znaménko determinantu při výpočtu objemu?
103. Jak počítáme vzdálenost bodu od přímky a roviny, vzdálenost dvou mimoběžek.

### Grupy, tělesa

104. Definujte grupu a uveďte příklady grup (skládání zobrazení, sčítání, násobení čísel, plus modulo, krát modulo, součin matic).
105. Proč v grupě umíme řešit rovnice  $a \circ x = b$  a  $y \circ a = b$ ? Je pologrupa s možností řešit tyto rovnice grupou?
106. Definujte těleso a uveďte příklady nekonečných i konečných těles.
107. Proč pro každé těleso platí: součin nenulových prvků je nenulový?
108. Definujte charakteristiku tělesa a zdůvodněte, proč je charakteristika rovna prvočíslu.
109. Uveďte příklad lineárního prostoru nad tělesem  $\mathbf{Z}_5$ . Jakou má dimenzi?
110. Je možné, aby existovaly různé polynomy nad  $\mathbf{Z}_5$ , které vymezují stejné zobrazení  $\mathbf{Z}_5 \rightarrow \mathbf{Z}_5$ ? Vysvětlete.
111. Uveďte základní vlastnosti tělesa  $\mathbf{Z}_2$ .

### Kódování

112. Vysvětlete pojmy kód, kódové slovo, Hammingova velikost, lineární kód.
113. Co je a k čemu slouží generující a kontrolní matice lineárního kódu?
114. Navrhněte kontrolní a generující matici Hammingova (7,4) kódu a popište proces kódování, dekódování a opravy chyby.
115. Vysvětlete principy cyklických kódů. Jak probíhá kódování a dekódování?

### Požadavky na praktické dovednosti

Příklady budou voleny tak, aby bylo v lidských silách najít řešení. Tj. matice můžete očekávat typu (3, 4) nebo menší, úlohy budou mít malá celá čísla v zadání a nekomplikované řešení. Polynomy budou stupně max 5 s celočíselnými koeficienty i (skoro všemi) kořeny.

1. Rozložit polynom na součin ireducibilních polynomů (předpokládají se celočíselné kořeny).
2. Vyřešit soustavu lineárních rovnic (i s parametrem / s parametry).
3. Najít souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.
4. Rozhodnout o skupině vektorů, zda jsou závislé či nezávislé.
5. Rozhodnout o lineárních obalech (různých skupin vektorů), zda se rovnají, je jeden podmnožinou druhého atd.
6. Najít průniky a spojení lineárních obalů.
7. Vyřešit maticové rovnosti s regulární maticí.
8. Najít bázi podprostoru matic komutujících s danou maticí.
9. Najít bázi podprostoru vymezeného nějakou vlastností.
10. Sestavit matici daného lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím.
11. Počítat matice složených zobrazení jako součin jejich matic.
12. Rozhodnout o vlastnostech lineárního zobrazení (kernel, defekt, hodnost) podle jejich matice.
13. Najít vzorec pro lineární zobrazení, jsou-li známy jeho hodnoty na bázi.
14. Sestavit matici v homogenních souřadnicích základních transformací: otočení, změny měřítka, posunutí (a jejich složení).
15. Najít vlastní čísla a vlastní vektory dané (malé) matice.
16. Vyřešit jednoduché geometrické úlohy v euklidovském prostoru dimenze 3: vzájemné polohy přímek, rovin, přímky a roviny, vzdálenost mimoběžek, bodu od přímky a od roviny, úhly různoběžek, přímky a roviny, roviny, plochy trojúhelníků rovnoběžníků, objemy čtyřstěnů, rovnoběžnostěnů.