Násobení matic

- je asociativní, není komutativní
- k regulárním maticím existují inverzní matice

a) nasobenimatic, 7, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Maticové násobení

Definice: Pro matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n,p}$ existuje maticový součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m,p}$ (v tomto pořadí). Jednotlivé prvky součinu $c_{i,k}$ jsou dány vzorcem:

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,n}b_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}.$$

Příklad: Je-li $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3,4}$ a $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{4,5}$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je definováno, ale $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ není definováno.

Pozorování: Aby bylo definováno $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, musí mít $\mathbf{A}$ stejný počet sloupců jako má $\mathbf{B}$ řádků. Výsledná matice má tolik řádků, jako má řádků matice $\mathbf{A}$ a tolik sloupců, jako má sloupců matice $\mathbf{B}$.

Příklady násobení

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznatky z předchozích příkladů:

- Maticové násobení není komutativní ani pro čtvercové matice
- Neplatí pravidlo: součin nenulových matic musí být nenulová matice
- Co tedy platí? …

Vlastnosti maticového násobení:

- $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ ... asociativní zákon
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ ... distributivní zákon
- $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$ ... distributivní zákon
- $\alpha(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\alpha\mathbf{B})$ ... konstanta
- $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$ ... transponovaná matice

Příklad: soustavy lin. rovnic

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$.

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Toto je soustava lineárních rovnic s m rovnicemi a n neznámými.

Stručně zapisujeme: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *matice soustavy*, jednosloupcová matice $\mathbf{b}$ je *vektor pravých stran*. Úkolem je nalézt všechny jednosloupcové matice $\mathbf{x}$, které vyhovují maticové rovnici.

Blokové násobení

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice sestavené po blocích takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{pmatrix}$$

Nechť uvedené bloky jsou matice takového typu, že násobení matic $\mathbf{A}_{i,j}\cdot\mathbf{B}_{j,k}$ je definováno pro všechny případy, které se vyskytují v následujícím vzorci. Pak

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1}\cdot\mathbf{B}_{1,1}+\mathbf{A}_{1,2}\cdot\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{1,1}\cdot\mathbf{B}_{1,2}+\mathbf{A}_{1,2}\cdot\mathbf{B}_{2,2} \\ \mathbf{A}_{2,1}\cdot\mathbf{B}_{1,1}+\mathbf{A}_{2,2}\cdot\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,1}\cdot\mathbf{B}_{1,2}+\mathbf{A}_{2,2}\cdot\mathbf{B}_{2,2} \end{pmatrix}$$

... analogicky pro jinak vytvořené bloky. Například:

$$\mathbf{A}\cdot(\,\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{B}_p\,) = (\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_p\,)$$

Výpočetní složitost maticového násobení

Předpokládejme dvě matice $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n,n}$. K výpočtu $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (podle definice) potřebujeme n^3 operací (násobení dvou čísel). Nedalo by se ušetřit?

- **Rekurzivní algoritmus násobení matic:** vychází z blokového násobení. Potřebuje $F(n)$ operací:

$$\begin{aligned} F(n) &= 8F(n/2) = 8(8F(n/4)) = 8(8(8F(n/2^3))) = \\ &= \cdots = 8^m F(n/2^m) = 8^m F(1) = \\ &= 8^m = (2^3)^m = 2^{3m} = (2^m)^3 = n^3. \end{aligned}$$

- **Rekurzivní Strassenův algoritmus:** vychází z blokového násobení, ale vystačí si se sedmi součiny. Potřebuje $F(n)$ operací:

$$\begin{aligned} F(n) &= 7F(n/2) = 7(7F(n/4)) = 7(7(7F(n/2^3))) = \\ &= \cdots = 7^m F(n/2^m) = 7^m F(1) = \\ &= 7^m = (2^{\log_2 7})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 7\cdot\log_2 n} = n^{\log_2 7} \doteq n^{2{,}807}. \end{aligned}$$

Strassenův algoritmus

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_4) \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_4),\\
\mathbf{X}_2 &= (\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4) \cdot \mathbf{B}_1,\\
\mathbf{X}_3 &= \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_4),\\
\mathbf{X}_4 &= \mathbf{A}_4 \cdot (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1),\\
\mathbf{X}_5 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{B}_4,\\
\mathbf{X}_6 &= (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2),\\
\mathbf{X}_7 &= (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_4) \cdot (\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4)
\end{aligned}
$$

Dá se ověřit, že platí:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_7 & \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_6 \end{pmatrix}
$$

Komutující matice

Když platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, říkáme, že matice $\mathbf{B}$ komutuje s maticí $\mathbf{A}$.

Pozorování: Komutovat mohou pouze čtvercové matice stejného typu.

Úloha: Je pevně dána čtvercová matice $\mathbf{A}$, je třeba najít k ní množinu všech matic $\mathbf{B}$, které komutují s $\mathbf{A}$.

Pozorovaní: Uvedená množina matic $\mathbf{B}$, které komutují s danou maticí $\mathbf{A}$, tvoří lineární podprostor lineárního prostoru matic $\mathbf{R}^{n,n}$.

Inverzní matice

Čtvercovou matici s jedničkami na diagonále a nulami jinde značíme $\mathbf{E}$ a říkáme ji *jednotková matice*.

Pozorování: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, analogie s čísly: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Definice: *Inverzí matice* ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ je taková matice $\mathbf{B}$, pro kterou je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

(viz též analogie s čísly). Inevzní matici značíme $\mathbf{A}^{-1}$.

Pozorování: Pokud k matici $\mathbf{A}$ inverzní matice existuje, pak je určena jednoznačně. Důvod je zde:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1) = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}_2$$

Otázka: Jak poznáme existenci inverzní matice k matici $\mathbf{A}$?

Regulární a singulární matice

Definice: Čtvercová matice je *regulární*, pokud má inverzní matici. Čtvercová matice je *singulární*, pokud nemá inverzní matici.

Pozorování: Součin regulárních matic je regulární matice. Má-li matice $\mathbf{A}$ inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ a dále má-li matice $\mathbf{B}$ inverzní matici $\mathbf{B}^{-1}$, pak inverzní matice k $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Platí totiž:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E},\\
(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.
\end{aligned}
$$

Výpočet inverzní matice eliminací

Algoritmus: Má-li $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé řádky, pak existuje $\mathbf{A}^{-1}$ a lze ji vypočítat takto:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1})$$

Ke zdůvodnění této metody potřebujeme zavést tři typy čtvercových matic, které (pokud jimi násobíme vybranou matici zleva) „emulují“ jednotlivé kroky eliminační metody. Součin těchto elementárních matic emulující všechny provedené kroky je matice $\mathbf{P}$, pro kterou platí:

Věta: Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak existuje regulární $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$.

Podmínky regularity matice

Následující podmínky jsou ekvivalentní s regularitou matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n,n}$:

- $\mathbf{A}$ má inverzní matici (viz definice).
- Maticová rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení pro každou $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n,m}$.
- Matice $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky.
- $\operatorname{hod} \mathbf{A} = n$.
- existuje eliminační proces, který provede $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$.
- $\det \mathbf{A} \neq 0$ (o determinantech pohovoříme později)

Hodnost součinu

Věta: Je-li $\mathbf{P}$ regulární a platí-li $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$, pak $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Důkaz: $\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$ a stejné kroky eliminace použijeme na $(\mathbf{P}\,|\,\mathbf{B})$, tj.:

$$(\mathbf{P}\,|\,\mathbf{B}) = (\mathbf{P}\,|\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \sim (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}\,|\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}),$$

takže $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Věta: Násobíme-li matici $\mathbf{A}$ jakoukoli regulární maticí, nezmění se hodnost. Tedy: $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})$.

Věta: $\operatorname{hod}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \le \min(\operatorname{hod} \mathbf{A}, \operatorname{hod} \mathbf{B})$

Důkaz*: $\operatorname{hod} \mathbf{A} = k$, tj. $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ má k nenulových řádků. Existuje tedy $\mathbf{P}$ regulární, že $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}$. Dále platí:

$$\operatorname{hod}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{hod}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{hod}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \le k.$$