


Matice lineárních zobrazení

- matice určuje zobrazení $A(x) = \mathbf{Ax}$
- zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ určuje matici
- zobrazení lin. prostorů konečné dimenze mají matici vzhledem k vybraným bázím

a) matzob, 11, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/20010, g)  Viz p. d. 4/2010

Připomenutí

Zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ je *lineární*, když

- $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$,
- $A(\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \cdot A(\vec{x})$.

Což je ekvivalentní s principem superpozice:

- $A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n) = \alpha_1 A(\vec{x}_1) + \dots + \alpha_n A(\vec{x}_n)$

BI-LIN, matzob, 11, P. Olšák [3]

**Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$,
pak máme zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.**

Skutečně, zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ dané předpisem

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je lineární.

Poznámka: vektory z \mathbf{R}^n , \mathbf{R}^m nyní považujeme za *sloupcové vektory*.

BI-LIN, matzob, 11, P. Olšák [4]

Příklad

Zobrazení $A : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je určeno maticí $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3,4}$:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \\ &= (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4, 3x_1 + x_2 + 2x_4, 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4)^T \end{aligned}$$

- jádro tohoto zobrazení je nulový prostor matice \mathbf{A} .
- hodnost zobrazení A je hodnost matice \mathbf{A}
- věta $\text{def} A + \text{hod} A = \dim L_1$ přechází na větu $\dim M_0 + \text{hod} \mathbf{A} = \text{počet proměnných}$.

Hodnost zobrazení je hodnost matice

Věta: Necht' $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$. Hodnost lineárního zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, které je dáno předpisem $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, je rovna hodnosti matice \mathbf{A} , tedy:

$$\text{hod}A = \text{hod} \mathbf{A}$$

Důkaz: hodnost zobrazení je dimenze obalu obrazů bázových vektorů, což je dimenze obalu sloupců matice, což je hodnost matice.

Lineární prostor lineárních zobrazení

- Všechna lineární zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ označím T .
- Symboly A a B na této stránce jsou prvky z T .
- Definujeme $A + B : L_1 \rightarrow L_2$ předpisem $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$.
- Pozorování: Součet prvků z T je prvek z T .
- Definujeme $\alpha \cdot A : L_1 \rightarrow L_2$ předpisem $(\alpha \cdot A)(x) = \alpha \cdot A(x)$.
- Pozorování: α -násobek prvku z T je prvek z T .
- Uvedené operace splňují axiomy lineárního prostoru (díky tomu, že L_2 je lineární prostor), takže:
- T je lineární prostor lineárních zobrazení.

Lin. zobrazení určeno hodnotami na bázi

Věta: Jsou-li známy hodnoty lineárního zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ na konečné bázi B lin. prostoru L_1 , je tím zobrazení A jednoznačně určeno na celém L_1 .

Důkaz: $A(\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n) = \alpha_1 A(\vec{b}_1) + \dots + \alpha_n A(\vec{b}_n)$
 Zobrazení souřadnic je lineární, takže takto dodefinované zobrazení A je lineární. Na bázových vektorech má předepsané hodnoty.

Jednoznačnost: Kdyby existovalo další lineární zobrazení B se stejnými hodnotami na bázi B , pak $A - B$ je lineární zobrazení s nulovými hodnotami na bázi a podle principu superpozice musí být $A - B$ nulové zobrazení všude. Takže $A = B$.

Příklad

Je dáno

$$A(1, 1, 2) = (1, 0, 1, 0), \quad A(1, 2, 2) = (2, 0, 2, 0), \quad A(2, 1, 5) = (1, 2, 2, 1).$$

Protože trojice vektorů $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 5)$ tvoří bázi v \mathbf{R}^3 , existuje jediné lineární zobrazení s uvedenou vlastností. Najdeme vzorec pro $A(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= \alpha (1, 1, 2) + \beta (1, 2, 2) + \gamma (2, 1, 5) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (8x_1 - x_2 - 3x_3) \cdot (1, 1, 2) + (-3x_1 + x_2 + x_3) \cdot (1, 2, 2) + \\ &\quad + (x_3 - 2x_1) \cdot (2, 1, 5), \\ A(x_1, x_2, x_3) &= A((8x_1 - x_2 - 3x_3)(1, 1, 2) + (-3x_1 + x_2 + x_3)(1, 2, 2) + \\ &\quad + (x_3 - 2x_1)(2, 1, 5)) = \\ &= (8x_1 - x_2 - 3x_3)(1, 0, 1, 0) + (-3x_1 + x_2 + x_3)(2, 0, 2, 0) + \\ &\quad + (x_3 - 2x_1)(1, 2, 2, 1) = \\ &= (x_2, -4x_1 + 2x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 + x_3). \end{aligned}$$

Každé lin. zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ má svou matici $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$

Věta: Pro každé lineární zobrazení $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ existuje jediná matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$, pro kterou je

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Důkaz: Necht' $\mathbf{A} = (A(\mathbf{e}_1) \ A(\mathbf{e}_2) \ \dots \ A(\mathbf{e}_n))$. Zřejmě platí $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Zobrazení A i zobrazení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ jsou lineární zobrazení, která se shodují na bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Takže se shodují všude.

Důsledek: Vzorec pro hodnoty jakéhokoli lineárního zobrazení z \mathbf{R}^n do \mathbf{R}^m má vždy tvar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Od zobrazení k matici

$$A : L_1 \rightarrow L_2 \iff A' : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \iff \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$$

Každému lineárnímu zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ lineárních prostorů konečné dimenze přiřadíme matici takto:

- V L_1 zvolíme uspořádanou bázi (B) .
- V L_2 zvolíme uspořádanou bázi (C) .
- Zobrazení souřadnic $L_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$ vzhledem k (B) označíme C_1 .
- Zobrazení souřadnic $L_2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ vzhledem k (C) označíme C_2 .
- Necht' $A' = C_2 \circ A \circ C_1^{-1}$.
- Zobrazení A' je lineární a má svou matici \mathbf{A} .

Matice \mathbf{A} se nazývá *matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C)* .

Vlastnosti matice zobrazení

\mathbf{A} je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C) právě tehdy když:

- $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ A(\vec{u}) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix}$
- $(A(\vec{b}_1) \ A(\vec{b}_2) \ \dots \ A(\vec{b}_n)) = (\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_m) \cdot \mathbf{A}$.
- \mathbf{A} obsahuje v i -tém sloupci souřadnice vektoru $A(\vec{b}_i)$ vzhledem k bázi (C)

Příklad

Necht' P_3 jsou polynomy nejvýše třetího stupně. Je dáno lineární zobrazení $A : P_3 \rightarrow P_3$, které derivuje polynomy. Najdeme jeho matici vzhledem k uspořádaným bázím $(1, x, x^2, x^3)$ a $(1, x, x^2, x^3)$.

Matice má ve sloupcích souřadnice obrazů bázových vektorů, tj.

$$A(1) = 0, \quad A(x) = 1, \quad A(x^2) = 2x, \quad A(x^3) = 3x^2$$

Souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi $\{1, x, x^2, x^3\}$ napíšeme do sloupců matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zkuste „derivovat“ polynomy pomocí maticového násobení...

Skládání zobrazení \longleftrightarrow součin matic

Věta: Necht' lineární zobrazení A má matici \mathbf{A} a lineární zobrazení B má matici \mathbf{B} (vzhledem k odpovídajícím bázím). Pak složené lineární zobrazení $B \circ A$ má matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (vzhledem k odpovídajícím bázím).

Poznámka: Je-li $A : L_1 \rightarrow L_2$ a $B : L_2 \rightarrow L_3$, pak „odpovídající báze“ jsou uspořádané báze $(U) \vee L_1, (V) \vee L_2$ a $(W) \vee L_3$. V uvedené větě se pak pracuje s maticí \mathbf{A} vzhledem k $(U), (V)$, s maticí \mathbf{B} vzhledem k $(V), (W)$ a s maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ vzhledem k $(U), (W)$.

Důkaz věty se opírá o rovnost

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (U) \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ A(\vec{u}) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ B(A(\vec{u})) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (W) \end{pmatrix}.$$

Příklad

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice derivace vzhledem k uspořádaným bázím $(1, x, x^2, x^3)$ a $(1, x, x^2, x^3)$. Podle věty o složeném zobrazení je \mathbf{A}^2 matice druhé derivace a \mathbf{A}^3 matice třetí derivace.

Zobrazení $A : L \rightarrow L$

Definice: Zobrazení do stejné množiny se nazývá *transformace*. Lineární zobrazení do stejného lineárního prostoru se nazývá *lineární transformace*.

Matice transformace $A : L \rightarrow L$ vzhledem k bázi (B) je matice lineárního zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (B) .

Příklady

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je matice *projekce*.

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ je matice *rotace*.

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ je (pro $a \neq 0, b \neq 0$) matice *změny měřítka*.

- Další transformace vznikají skládáním těchto elementárních transformací, jejich matice jsou pak součinem těchto elementárních matic.

Příklad

Nechť osa o prochází počátkem a svírá s osou x úhel α . Najdeme matici osové souměrnosti podle osy o .

Osová souměrnost vzniká jako složení následujících zobrazení:

- otočení o úhel $-\alpha$,
- zrcadlení, tj. změna měřítka s parametry 1, -1 ,
- otočení zpět o úhel α .

Matici tohoto složeného zobrazení spočítáme jako součin matic uvedených zobrazení zapsaných „zprava doleva“:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Nestandardní báze, příklad

Najdeme matici zobrazení $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, které je dané předpisem

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -4x_1 + 2x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 + x_3),$$

vzhledem k bázím $(B) = ((1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 5))$ a (S_4)

Protože $A(1, 1, 2) = (1, 0, 1, 0)$, $A(1, 2, 2) = (2, 0, 2, 0)$, $A(2, 1, 5) = (1, 2, 2, 1)$, a protože složky těchto obrazů jsou rovny souřadnicím vzhledem ke standardní bázi (S_4) , stačí složky těchto obrazů napsat do sloupců hledané matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud bychom měli hledat matici zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k nestandardní bázi v L_2 , budeme mít více problémů...

Hodnost matice je hodnost zobrazení

- Tuto skutečnost jsme zatím dokázali pro speciální zobrazení tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.
- Pro obecné lineární zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ také platí

$$\text{hod } A = \text{hod } \mathbf{A},$$

protože $\text{hod } A = \text{hod } A'$, kde $A' = C_2 \circ A \circ C_1^{-1}$. Platí:

$$\begin{aligned} \text{hod } A &= \dim A(L_1) = \dim A(\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \rangle) = \\ &= \dim \langle A(\vec{b}_1), A(\vec{b}_2), \dots, A(\vec{b}_n) \rangle = \\ &= \dim \langle C_2^{-1} \circ A' \circ C_1(\vec{b}_1), \dots, C_2^{-1} \circ A' \circ C_1(\vec{b}_n) \rangle = \\ &= \dim C_2^{-1}(\langle A'(\vec{e}_1), A'(\vec{e}_2), \dots, A'(\vec{e}_n) \rangle) = \\ &= \dim \langle A'(\vec{e}_1), A'(\vec{e}_2), \dots, A'(\vec{e}_n) \rangle = \\ &= \dim A'(\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle) = \dim A'(\mathbf{R}^n) = \text{hod } A' \end{aligned}$$

Uvedené rovnosti platí, protože C_1 a C_2 jsou izomorfismy.

Transformace je prostá právě když má regulární matici

Nechť L má konečnou dimenzi, $\dim L = n$.

Věta: Lineární transformace $A : L \rightarrow L$ je prostá právě když:

- je na
- má regulární matici

Důkaz: A je prostá právě když $\text{def } A = 0$.

Protože $\text{def } A + \text{hod } A = \dim L$, je $\text{def } A = 0$ právě když $\text{hod } A = n$. To platí právě když $A(L) = L$, tj. A je na L .

Uvedené vlastnosti jsou splněny právě když $\text{hod } \mathbf{A} = n$, kde \mathbf{A} je matice zobrazení A , tj. právě když \mathbf{A} je regulární.

Prostor lineárních zobrazení je izomorfní s lineárním prostorem matic

- Každému zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ (kde $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$) je jednoznačně přiřazena matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$ vzhledem k bázím (B) a (C) .
- Toto přiřazení je zobrazení prosté a na.
- Toto přiřazení je dokonce lineární zobrazení. Stačí ověřit, že součet dvou zobrazení A a B s maticemi \mathbf{A} a \mathbf{B} (vzhledem ke zvoleným bázím) má matici $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Dále je třeba ověřit, že α násobek lineárního zobrazení má matici, která je rovna α násobku původní matice.
- Mám na mysli zobrazení a píšou jeho matici. Mám na mysli matici a vnímám ji jako zobrazení. Je to jedno.