Matice lineárních zobrazení

- matice určuje zobrazení $A(x) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ určuje matici
- zobrazení lin. prostorů konečné dimenze mají matici vzhledem k vybraným bázím

a) matzob, 11, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/20010, g) . Viz p. d. 4/2010

Připomenutí

Zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je *lineární*, když

- $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$,
- $A(\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \cdot A(\vec{x})$.

Což je ekvivalentní s principem superpozice:

- $A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n) \;=\; \alpha_1 A(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_n A(\vec{x}_n)$

Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$, pak máme zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Skutečně, zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dané předpisem

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je lineární.

Poznámka: vektory z $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ nyní považujeme za *sloupcové vektory*.

Příklad

Zobrazení $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je určeno maticí $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3,4}$:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} =$$

$$= (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4,\; 3x_1 + x_2 + 2x_4,\; 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4)^T$$

- jádro tohoto zobrazení je nulový prostor matice $\mathbf{A}$.
- hodnost zobrazení A je hodnost matice $\mathbf{A}$
- věta $\mathrm{def} A + \mathrm{hod} A = \dim L_1$ přechází na větu $\dim M_0 + \mathrm{hod}\, \mathbf{A} =$ počet proměnných.

Hodnost zobrazení je hodnost matice

Věta: Nechť $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$. Hodnost lineárního zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, které je dáno předpisem $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, je rovna hodnosti matice $\mathbf{A}$, tedy:

$$\operatorname{hod} A = \operatorname{hod} \mathbf{A}$$

Důkaz: hodnost zobrazení je dimenze obalu obrazů bázových vektorů, což je dimenze obalu sloupců matice, což je hodnost matice.

Lineární prostor lineárních zobrazení

- Všechna lineární zobrazení $A : L_1 \to L_2$ označím T.
- Symboly A a B na této stránce jsou prvky z T.
- Definujeme $A + B : L_1 \to L_2$ předpisem $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$.
- Pozorování: Součet prvků z T je prvek z T.
- Definujeme $\alpha \cdot A : L_1 \to L_2$ předpisem $(\alpha \cdot A)(x) = \alpha \cdot A(x)$.
- Pozorování: α-násobek prvku z T je prvek z T.
- Uvedené operace splňují axiomy lineárního prostoru (díky tomu, že L_2 je lineární prostor), takže:
- T je lineární prostor lineárních zobrazení.

Lin. zobrazení určeno hodnotami na bázi

Věta: Jsou-li známy hodnoty lineárního zobrazení $A : L_1 \to L_2$ na konečné bázi B lin. prostoru L_1, je tím zobrazení A jednoznačně určeno na celém L_1.

Důkaz: $A(\alpha_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{b}_n) = \alpha_1 A(\overrightarrow{b}_1) + \cdots + \alpha_n A(\overrightarrow{b}_n)$
Zobrazení souřadnic je lineární, takže takto dodefinované zobrazení A je lineární. Na bázových vektorech má předepsané hodnoty.

Jednoznačnost: Kdyby existovalo další lineární zobrazení B se stejnými hodnotami na bázi B, pak $A - B$ je lineární zobrazení s nulovými hodnotami na bázi a podle principu superpozice musí být $A - B$ nulové zobrazení všude. Takže $A = B$.

Příklad

Je dáno

$$A(1,1,2) = (1,0,1,0),\ A(1,2,2) = (2,0,2,0),\ A(2,1,5) = (1,2,2,1).$$

Protože trojice vektorů $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,5)$ tvoří bázi v $\mathbf{R}^3$, existuje jediné lineární zobrazení s uvedenou vlastností. Najdeme vzorec pro $A(x_1,x_2,x_3)$:

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2,x_3) &= \alpha\,(1,1,2) + \beta\,(1,2,2) + \gamma\,(2,1,5)\\
(x_1,x_2,x_3) &= (8x_1 - x_2 - 3x_3)\cdot(1,1,2) + (-3x_1 + x_2 + x_3)\cdot(1,2,2) +\\
&\qquad + (x_3 - 2x_1)\cdot(2,1,5),\\
A(x_1,x_2,x_3) &= A((8x_1 - x_2 - 3x_3)\,(1,1,2) + (-3x_1 + x_2 + x_3)\,(1,2,2) +\\
&\qquad + (x_3 - 2x_1)\,(2,1,5)) =\\
&= (8x_1{-}x_2{-}3x_3)\,(1,0,1,0) + (-3x_1{+}x_2{+}x_3)\,(2,0,2,0) +\\
&\qquad + (x_3 - 2x_1)\,(1,2,2,1) =\\
&= (x_2,\ -4x_1 + 2x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_1 + x_3).
\end{aligned}$$

Každé lin. zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ má svou matici $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$

Věta: Pro každé lineární zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ existuje jediná matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$, pro kterou je

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Důkaz: Nechť $\mathbf{A} = (A(\mathbf{e}_1)\, A(\mathbf{e}_2)\ \dots\ A(\mathbf{e}_n))$. Zřejmě platí $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
Zobrazení A i zobrazení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ jsou lineární zobrazení, která se shodují na bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Takže se shodují všude.

Důsledek: Vzorec pro hodnoty jakéhokoli lineárního zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$ má vždy tvar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Od zobrazení k matici

$$A : L_1 \to L_2 \quad \longleftrightarrow \quad A' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$$

Každému lineárnímu zobrazení $A : L_1 \to L_2$ lineárních prostorů konečné dimenze přiřadíme matici takto:

- V L_1 zvolíme uspořádanou bázi (B).
- V L_2 zvolíme uspořádanou bázi (C).
- Zobrazení souřadnic $L_1 \to \mathbf{R}^n$ vzhledem k (B) označíme C_1.
- Zobrazení souřadnic $L_2 \to \mathbf{R}^m$ vzhledem k (C) označíme C_2.
- Nechť $A' = C_2 \circ A \circ C_1^{-1}$.
- Zobrazení A' je lineární a má svou matici $\mathbf{A}$.

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C)*.

Vlastnosti matice zobrazení

$\mathbf{A}$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C) právě tehdy když:

- $$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ A(\vec{u}) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (C) \end{pmatrix}$$
- $$(A(\vec{b}_1)\ A(\vec{b}_2)\ \dots\ A(\vec{b}_n)) = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \dots\ \vec{c}_m) \cdot \mathbf{A}.$$
- $\mathbf{A}$ obsahuje v i-tém sloupci souřadnice vektoru $A(\vec{b}_i)$ vzhledem k bázi (C)

Příklad

Nechť P_3 jsou polynomy nejvýše třetího stupně. Je dáno lineární zobrazení $A : P_3 \to P_3$, které derivuje polynomy. Najdeme jeho matici vzhledem k uspořádaným bázím $(1, x, x^2, x^3)$ a $(1, x, x^2, x^3)$.

Matice má ve sloupcích souřadnice obrazů bázových vektorů, tj.

$$A(1) = 0, \quad A(x) = 1, \quad A(x^2) = 2x, \quad A(x^3) = 3x^2$$

Souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi $\{1, x, x^2, x^3\}$ napíšeme do sloupců matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zkuste „derivovat“ polynomy pomocí maticového násobení…

Skládání zobrazení $\longleftrightarrow$ součin matic

Věta: Nechť lineární zobrazení A má matici $\mathbf{A}$ a lineární zobrazení B á matici $\mathbf{B}$ (vzhledem k odpovídajícím bázím). Pak složené lineární zobrazení $B \circ A$ má matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (vzhledem k odpovídajícím bázím).

Poznámka: Je-li $A : L_1 \to L_2$ a $B : L_2 \to L_3$, pak „odpovídající báze" jsou uspořádané báze (U) v L_1, (V) v L_2 a (W) v L_3. V uvedené větě se pak pracuje s maticí $\mathbf{A}$ vzhledem k (U), (V), s maticí $\mathbf{B}$ vzhledem k (V), (W) a s maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ vzhledem k (U), (W).

Důkaz věty se opírá o rovnost

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ \vec{u} \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (U) \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ A(\vec{u}) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{souřadnice} \\ \text{vektoru} \\ B(A(\vec{u})) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (W) \end{pmatrix}.$$

Příklad

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice derivace vzhledem k uspořádaným bázím $(1, x, x^2, x^3)$ a $(1, x, x^2, x^3)$. Podle věty o složeném zobrazení je $\mathbf{A}^2$ matice druhé derivace a $\mathbf{A}^3$ matice třetí derivace.

Zobrazení $A : L \to L$

Definice: Zobrazení do stejné množiny se nazývá *transformace*. Lineární zobrazení do stejného lineárního prostoru se nazývá *lineární transformace*.

Matice transformace $A : L \to L$ vzhledem k bázi (B) je matice lineárního zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (B).

Příklady

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je matice *projekce*.
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ je matice *rotace*.
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ je (pro $a \neq 0$, $b \neq 0$) matice *změny měřítka*.
- Další transformace vznikají skládáním těchto elementárních transformací, jejich matice jsou pak součinem těchto elementárních matic.

Příklad

Nechť osa o prochází počátkem a svírá s osou x úhel α. Najdeme matici osové souměrnosti podle osy o..

Osová souměrnost vzniká jako složení následujících zobrazení:

- otočení o úhel $-\alpha$,
- zrcadlení, tj. změna měřítka s parametry 1, −1,
- otočení zpět o úhel α.

Matici tohoto složeného zobrazení spočítáme jako součin matic uvedených zobrazení zapsaných „zprava doleva“:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Nestandardní báze, příklad

Najdeme matici zobrazení $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, které je dané předpisem

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_2,\ -4x_1 + 2x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_1 + x_3),$$

vzhledem k bázím $(B) = ((1,1,2),(1,2,2),(2,1,5))$ a (S_4)

Protože $A(1,1,2) = (1,0,1,0)$, $A(1,2,2) = (2,0,2,0)$, $A(2,1,5) = (1,2,2,1)$, a protože složky těchto obrazů jsou rovny souřadnicím vzhledem ke standardní bázi (S_4), stačí složky těchto obrazů napsat do sloupců hledané matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud bychom měli hledat matici zobrazení $A : L_1 \to L_2$ vzhledem k nestandardní bázi v L_2, budeme mít více problémů…

Hodnost matice je hodnost zobrazení

- Tuto skutečnost jsme zatím dokázali pro speciální zobrazení tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.
- Pro obecné lineární zobrazení $A : L_1 \to L_2$ také platí

  $$\operatorname{hod} A = \operatorname{hod} \mathbf{A},$$

  protože $\operatorname{hod} A = \operatorname{hod} A'$, kde $A' = C_2 \circ A \circ C_1^{-1}$. Platí:

  $$\begin{aligned} \operatorname{hod} A &= \dim A(L_1) = \dim A(\langle \vec b_1, \vec b_2, \ldots, \vec b_n \rangle) = \\ &= \dim \langle A(\vec b_1), A(\vec b_2), \ldots, A(\vec b_n) \rangle = \\ &= \dim \langle C_2^{-1} \circ A' \circ C_1(\vec b_1),\ \ldots,\ C_2^{-1} \circ A' \circ C_1(\vec b_n) \rangle = \\ &= \dim\ C_2^{-1}(\langle A'(\vec e_1), A'(\vec e_2), \ldots, A'(\vec e_n) \rangle) = \\ &= \dim \langle A'(\vec e_1), A'(\vec e_2), \ldots, A'(\vec e_n) \rangle = \\ &= \dim A'(\langle \vec e_1, \vec e_2, \ldots, \vec e_n \rangle) = \dim A'(\mathbf{R}^n) = \operatorname{hod} A' \end{aligned}$$

  Uvedené rovnosti platí, protože C_1 a C_2 jsou izomorfismy.

Transformace je prostá právě když má regulární matici

Nechť L má konečnou dimenzi, $\dim L = n$.

Věta: Lineární transformace $A : L \to L$ je prostá právě když:

- je na
- má regulární matici

Důkaz: A je prostá právě když $\operatorname{def} A = 0$.

Protože $\operatorname{def} A + \operatorname{hod} A = \dim L$, je $\operatorname{def} A = 0$ právě když $\operatorname{hod} A = n$. To platí právě když $A(L) = L$, tj. A je na L.

Uvedené vlastnosti jsou splněny právě když $\operatorname{hod} \mathbf{A} = n$, kde $\mathbf{A}$ je matice zobrazení A, tj. právě když $\mathbf{A}$ je regulární.

Prostor lineárních zobrazení je izomrofní s lineárním prostorem matic

- Každému zobrazení $A : L_1 \to L_2$ (kde $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$) je jednoznačně přiřazena matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$ vzhledem k bázím (B) a (C).
- Toto přiřazení je zobrazení prosté a na.
- Toto přiřazení je dokonce lineární zobrazení. Stačí ověřit, že součet dvou zobrazení A a B s maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (vzhledem ke zvoleným bázím) má matici $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Dále je třeba ověřit, že α násobek lineárního zobrazení má matici, která je rovna α násobku původní matice.
- Mám na mysli zobrazení a píšu jeho matici. Mám na mysli matici a vnímám ji jako zobrazení. Je to jedno.