

# Matice

- mezi sebou sčítáme a násobíme konstantou (lineární prostor)
- měníme je na jiné matice eliminační metodou
- násobíme je mezi sebou
- ...

# Základní pojmy

*Matice* je tabulka čísel s konečným počtem řádků a sloupců.

Množina  $\mathbf{R}^{m,n}$  je množina matic s reálnými čísly s  $m$  řádky a  $n$  sloupci. Takovým maticím též říkáme *matice typu*  $(m, n)$ .

Na jednotlivé řádky v matici typu  $(m, n)$  můžeme pohlížet jako na vektory z  $\mathbf{R}^n$  a na jednotlivé sloupce můžeme pohlížet jako na vektory z  $\mathbf{R}^m$ .

Číslo na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice se nazývá  $(i, j)$ -tý prvek matice a používají se pro něj indexy:  $a_{i,j}$  (v tomto pořadí).

Matice budeme značit velkým tučným písmenem (**A**, **B**, atd.).

*Nulová matice* obsahuje samé nuly.

*Čtvercová matice* je matice typu  $(n, n)$ .

# Sčítání matic, násobení matic konstantou

Mezi sebou sčítáme jen matice stejného typu. Součet má stejný typ. Násobek konstantou  $\alpha$  má také stejný typ jako původní matice.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1}, & a_{1,2} + b_{1,2}, & \dots, & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1}, & a_{2,2} + b_{2,2}, & \dots, & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1}, & a_{m,2} + b_{m,2}, & \dots, & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1}, & \alpha a_{1,2}, & \dots, & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1}, & \alpha a_{2,2}, & \dots, & \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m,1}, & \alpha a_{m,2}, & \dots, & \alpha a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Množina matic  $\mathbf{R}^{m,n}$  s tímto  $+$  a  $\cdot$  tvoří lineární prostor.

**Cvičení:** Najděte bázi a dimenzi lineárního prostoru matic  $\mathbf{R}^{3,2}$ .

# Modifikace matic eliminační metodou

Vznikne-li matice  $\mathbf{B}$  z matice  $\mathbf{A}$  konečným počtem řádkových úprav eliminační metody, píšeme  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ . Jsou to (obecně) *různé* matice.

**Pozorování:** Je-li  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  pak také  $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$ . Jinými slovy: každá změna eliminační metodou je vratná.

Stačí si uvědomit, jak pracují tři základní operace v GEM: prohození řádků, pronásobení řádku nenulovou konstantou a přičtení násobku řádku k jinému.

# Eliminace zachovává obal řádků

**Věta:** Gaussova eliminační metoda zachovává lineární obal řádků matice.

Jinými slovy: je-li  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ , pak lineární obal řádků matice  $\mathbf{A}$  je roven lineárnímu obalu řádků matice  $\mathbf{B}$ .

Důkaz: Přehození řádků: lin. obal se nezmění, to je zřejmé. Další dva typy operací v GEM přidávají k řádkům lineární kombinaci (tím nezmění lineární obal) a odeberou jeden vektor (lin. obal se může zmenšit). On se ale nezmenší, protože eliminace je vratná.

# Hodnost matice

**Definice:** *Hodnost matice  $\mathbf{A}$*  je dimenze lineárního obalu řádků matice  $\mathbf{A}$ . Značíme  $\text{hod } \mathbf{A}$ , anglicky „rank of matrix  $\mathbf{A}$ “.

**Pozorování:** Gaussova eliminační metoda nemění hodnost matice, tedy je-li  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ , pak  $\text{hod } \mathbf{A} = \text{hod } \mathbf{B}$ .

**Metoda počítání hodnosti:** Máme-li spočítat  $\text{hod } \mathbf{A}$ , eliminujeme  $\mathbf{A}$  na matici  $\mathbf{B}$  schodového tvaru. Počet nenulových řádků této matice je  $\text{hod } \mathbf{B}$  a tedy i  $\text{hod } \mathbf{A}$ .

**Proč?** Neulové řádky v matici  $\mathbf{B}$  tvoří bázi svého lineárního obalu. Jsou totiž lineárně nezávislé.

# Poznámky k hodnosti

- Souvislost mezi hodnotí matice a hodnoti lineárního zobrazení ukážeme později.
- Metoda počítání hodnoti je metodou počítání dimenze lineárního obalu.
- **Pozor:** Hodnost nelze definovat pomocí uvedené metody protože eliminační metoda není jednoznačný proces, tj. nemáme záruku stejného počtu nenulových řádků po provedení eliminace.
- Pozor na alternativní definici: hodnost jako maximální počet lineárně nezávislých řádků. Je třeba si uvědomit, co to znamená.
- Hodnost je přirozené číslo, které nemusí být jednoznačně stanoveno pro „nepřesné matice“ a „nepřesné výpočty“ (tzv. numericky nestabilní matice).

# GEM zachovává lineární nezávislost řádků

**Věta:** Je-li  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  pak  $\mathbf{A}$  obsahuje lineárně nezávislé řádky právě tehdy když  $\mathbf{B}$  obsahuje lin. nezávislé řádky.

**Důkaz:** Má-li  $\mathbf{A}$  lin. nezávislé řádky, pak tvoří bázi svého lin. obalu, takže hod  $\mathbf{A}$  je rovna počtu řádků matice  $\mathbf{A}$ . Je také rovna hodnoti matice  $\mathbf{B}$  (která má stejný počet řádků jako matice  $\mathbf{A}$ ), takže  $\mathbf{B}$  musí mít lin. nezávislé řádky.

**Metoda ověření závislosti:** Zapišeme zkoumané vektory do řádků matice  $\mathbf{A}$  a převedeme na schodovitý tvar  $\mathbf{B}$ . Zkoumané vektory jsou lin. závislé právě tehdy když  $\mathbf{B}$  obsahuje nulový řádek.

# Metody týkající se lineárních obalů

- $\vec{v} \in \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle$  právě když

$$\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle = \dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{v} \rangle.$$

**Metoda:** Vektor  $\vec{v}$  leží v lineárním obalu vektorů  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ , když hodnost matice obsahující v řádcích vektory  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  je stejná jako hodnost matice, ve které je navíc přidán řádek  $\vec{v}$ .

- $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$  právě když

$$\begin{aligned} \dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle &= \dim\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle = \\ &= \dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle \end{aligned}$$

**Metoda:** Ověříme rovnost hodností příslušných matic.

# Hodnost transponované matice

**Definice:** *Transponovaná matice* k matici  $\mathbf{A}$  (značíme  $\mathbf{A}^T$ ) je matice, ve které jsou řádky původní matice  $\mathbf{A}$  zapsány do sloupců.

**Pozorování:** Platí  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

**Věta:**  $\text{hod } \mathbf{A} = \text{hod } \mathbf{A}^T$ , jinými slovy: dimenze lineárního obalu řádků matice je rovna dimenzi lineárního obalu sloupců matice.

**Důkaz:** Je-li  $\text{hod } \mathbf{A} = k$ , pak  $\mathbf{A}$  má  $k$  lineárně nezávislých řádků. Jejich nezávislost lze ověřit z definice nezávislosti, což vede na soustavu s maticí  $\mathbf{A}^T$  (až na vynechání některých sloupců). Aby soustava měla jen nulové řešení, musí mít lineárně nezávislé rovnice. Takže (po doplnění vynechaných sloupců) musí  $\mathbf{A}^T$  mít aspoň  $k$  lineárně nezávislých řádků, tedy  $\text{hod } \mathbf{A} \leq \text{hod } \mathbf{A}^T$ . Rovnost pak plyne z výše uvedeného pozorování.