Matice

- mezi sebou sčítáme a násobíme konstantou (lineární prostor)
- měníme je na jiné matice eliminační metodou
- násobíme je mezi sebou
- …

a) matice, 6, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Základní pojmy

Matice je tabulka čísel s konečným počtem řádků a sloupců.

Množina $\mathbf{R}^{m,n}$ je množina matic s reálnými čísly s m řádky a n sloupci. Takovým maticím též říkáme *matice typu* (m,n).

Na jednotlivé řádky v matici typu (m,n) můžeme pohlížet jako na vektory z $\mathbf{R}^n$ a na jednotlivé sloupce můžeme pohlížet jako na vektory z $\mathbf{R}^m$.

Číslo na i-tém řádku a j-tém sloupci matice se nazývá (i,j)-tý prvek matice a používají se pro něj indexy: $a_{i,j}$ (v tomto pořadí).

Matice budeme značit velkým tučným písmenem ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, atd.).

Nulová matice obsahuje samé nuly.

Čtvercová matice je matice typu (n,n).

Sčítání matic, násobení matic konstantou

Mezi sebou sčítáme jen matice stejného typu. Součet má stejný typ. Násobek kontantou α má také stejný typ jako původní matice.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}, & a_{1,2}+b_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1}, & a_{2,2}+b_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}+b_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1}+b_{m,1}, & a_{m,2}+b_{m,2}, & \ldots, & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$\alpha\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \alpha\,a_{1,1}, & \alpha\,a_{1,2}, & \ldots, & \alpha\,a_{1,n} \\ \alpha\,a_{2,1}, & \alpha\,a_{2,2}, & \ldots, & \alpha\,a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ \alpha\,a_{m,1}, & \alpha\,a_{m,2}, & \ldots, & \alpha\,a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Množina matic $\mathbf{R}^{m,n}$ s tímto + a $\cdot$ tvoří lineární prostor.

Cvičení: Najděte bázi a dimenzi lineárního prostoru matic $\mathbf{R}^{3,2}$.

Modifikace matic eliminační metodou

Vznikne-li matice **B** z matice **A** konečným počtem řádkových úprav eliminační metody, píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Jsou to (obecně) *různé* matice.

Pozorování: Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ pak také $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$. Jinými slovy: každá změna eliminační metodou je vratná.

Stačí si uvědomit, jak pracují tři základní operace v GEM: prohození řídků, pronásobení řádku nenulovou konstantou a přičtení násobku řádku k jinému.

Eliminace zachovává obal řádků

Věta: Gaussova eliminační metoda zachovává lineární obal řádků matice.

Jinými slovy: je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak lineární obal řádků matice $\mathbf{A}$ je roven lineárnímu obalu řádků matice $\mathbf{B}$.

Důkaz: Přehození řádků: lin. obal se nezmění, to je zřejmé. Další dva typy opearci v GEM přidávají k řádkům lineární kombinaci (tím nezmění lineární obal) a odeberou jeden vektor (lin. obal se může zmenšit). On se ale nezmenší, protože eliminace je vratná.

Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* $\mathbf{A}$ je dimenze lineárního obalu řádků matice $\mathbf{A}$. Značíme $\operatorname{hod} \mathbf{A}$, anglicky „rank of matrix $\mathbf{A}$“.

Pozorování: Gaussova eliminační metoda nemění hodnost matice, tedy je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{B}$.

Metoda počítání hodnosti: Máme-li spočítat $\operatorname{hod} \mathbf{A}$, eliminujeme $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$ schodového tvaru. Počet nenulových řádků této matice je $\operatorname{hod} \mathbf{B}$ a tedy i $\operatorname{hod} \mathbf{A}$.

Proč? Neulové řádky v matici $\mathbf{B}$ tvoří bázi svého lineárního obalu. Jsou totiž lineárně nezávislé.

Poznámky k hodnosti

- Souvislost mezi hodností matice a hodnosti lineárního zobrazení ukážeme později.
- Metoda počítání hodnosti je metodou počítání dimenze lineárního obalu.
- **Pozor:** Hodnost nelze definovat pomocí uvedené metody protože eliminační metoda není jednoznačný proces, tj. nemáme záruku stejného počtu nenulových řádků po provedení eliminace.
- Pozor na alternativní definici: hodnost jako maximální počet lineárně nezávislých řádků. Je třeba si uvědomit, co to znamená.
- Hodnost je přirozené číslo, které nemusí být jednoznačně stanoveno pro „nepřesné matice“ a „nepřesné výpočty“ (tzv. numericky nestabilní matice).

GEM zachovává lineární nezávislost řádků

Věta: Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ pak $\mathbf{A}$ obsahuje lineárně nezávislé řádky právě tehdy když $\mathbf{B}$ obsahuje lin. nezávislé řádky.

Důkaz: Má-li $\mathbf{A}$ lin. nezávislé řádky, pak tvoří bázi svého lin. obalu, takže hod $\mathbf{A}$ je rovna počtu řádků matice $\mathbf{A}$. Je také rovna hodnosti matice $\mathbf{B}$ (která má stejný počet řádků jako matice $\mathbf{A}$), takže $\mathbf{B}$ musí mít lin. nezávislé řádky.

Metoda ověření závislosti: Zapíšeme zkoumané vektory do řádků matice $\mathbf{A}$ a převedeme na schodovitý tvar $\mathbf{B}$. Zkoumané vektory jsou lin. závislé právě tehdy když $\mathbf{B}$ obsahuje nulový řádek.

Metody týkající se lineárních obalů

- $\vec{v} \in \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \rangle$ právě když

$$\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \rangle = \dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v} \rangle.$$

Metoda: Vektor $\vec{v}$ leží v lineárním obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, když hodnost matice obsahující v řádcích vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ je stejná jako hodnost matice, ve které je navíc přidán řádek $\vec{v}$.

- $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ právě když

$$\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \rangle = \dim\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle =$$
$$= \dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Metoda: Ověříme rovnost hodností příslušných matic.

Hodnost transponované matice

Definice: *Transponovaná matice* k matici $\mathbf{A}$ (značíme $\mathbf{A}^T$) je matice, ve které jsou řádky původní matice $\mathbf{A}$ zapsány do sloupců.

Pozorování: Platí $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Věta: $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A}^T$, jinými slovy: dimenze lineárního obalu řádků matice je rovna dimenzi lineárního obalu sloupců matice.

Důkaz: Je-li $\operatorname{hod}\mathbf{A} = k$, pak $\mathbf{A}$ má k lineárně nezávislých řádků. Jejich nezávislost lze ověřit z definice nezávislosti, což vede na soustavu s maticí $\mathbf{A}^T$ (až na vynechání některých sloupců). Aby soustava měla jen nulové řešení, musí mít lineárně nezávislé rovnice. Takže (po doplnění vynechaných sloupců) musí $\mathbf{A}^T$ mít aspoň k lineárně nezávislých řádků, tedy $\operatorname{hod}\mathbf{A} \le \operatorname{hod}\mathbf{A}^T$. Rovnost pak plyne z výše uvedeného pozorování.