Lineární prostor

- je množina L jakýchkoli objektů s operacemi + a $\cdot$
- objekty lze sčítat mezi sebou, součet je také objekt z množiny L
- objekt lze násobit konstantou, násobek je také objekt z L
- operace sčítání a násobení splňují tzv. axiomy linearity

a) linprst, 2, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Příklady

- Funkce
- Polynomy
- Uspořádané n-tice čísel
- Orientovné úsečky
- Nekonečné posloupnosti
- Reálná čísla samotná
- Komplexní čísla
- ...

Definice lineárního prostoru

Lineárním prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu L, na které je definováno sčítání $+ : L \times L \to L$ a násobení reálným číslem $\cdot : \mathbf{R} \times L \to L$ a tyto operace splňují pro každé $\vec{x} \in L, \vec{y} \in L, \vec{z} \in L, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ vlastnosti:

(1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

(3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$

(4) $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

(5) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$

(6) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

(7) existuje $\vec{o} \in L$, že pro každé $\vec{x} \in L$ je $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$

Prvky lineárního prostoru nazýváme *vektory*. Reálnému číslu v kontextu násobení $\cdot : \mathbf{R} \times L \to L$ říkáme *skalár*. Prvku $\vec{o} \in L$ z vlastnosti (7) říkáme *nulový prvek* nebo *nulový vektor*.

Jednoduché vlastnosti

Pro nulový prvek $\vec{o}$ lineárního prostoru L platí vlastnosti:

(1) $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x} \qquad \forall\, \vec{x} \in L,$

(2) $\alpha \cdot \vec{o} = \vec{o} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbf{R},$

(3) Nechť $\vec{x} \in L$. Je-li $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $\alpha \neq 0$, pak $\vec{x} = \vec{o}$.

Co není lineárním prostorem

- Kvůli operacím: $(a, b) + (c, d) = (a + d, c + b)$, ...
- Kvůli množině: množina nenulových funkcí, ...

Konečné lineární prostory (nad R)

Jednobodový prostor (tzv. *trivilální*, obsahuje jen nulový vektor)

ALE: Neexistuje konečný lineární prostor s aspoň dvěma vektory.

Neobvyklý lineární prostor

- Množina: $\mathbf{R}^+$, operace: $\oplus : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $\odot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad \alpha \odot x = x^\alpha$$

Lineární podprostor

je podmnožina M lineárního prostoru L, která je sama se stejnými operacemi lineárním prostorem. Vlastnosti (1) až (7) jsou zaručeny, protože tytéž operace „pracují“ v L. Nemusí být ale splněna uzavřenost operací, tedy:

Definice: Nechť L je lineární prostor s operacemi „+“ a „·“. Neprázdnou množinu $M \subseteq L$ nazýváme *lineárním podprostorem prostoru* L, pokud pro všechna $\vec{x} \in M$, $\vec{y} \in M$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \vec{x} + \vec{y} \in M, \\ &(2) \quad \alpha \cdot \vec{x} \in M. \end{aligned}$$

Příklady lineárních podprostorů

- Polynomy v lineárním prostoru funkcí
- Polynomy nejvýše druhého stupně v lineárním prostoru polynomů
- Podmnožiny z $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z);\ x+2y=0,\ z \text{ libovolné}\} \quad \text{ANO}, \\ N &= \{(x,y,z);\ 2x+y-z=0\} \quad \text{ANO}, \\ S &= \{(x,y,z);\ 2x+y-z=3\} \quad \text{NE}. \end{aligned}$$

- Orientované úsečky ve společné rovině procházející bodem O,
- Orientované úsečky ve společné přímce procházející bodem O.

Průnik a sjednocení podprostorů

- Průnik podprostorů stejného lin. prostoru je vždy podprostor,
- sjednocení podprostorů stejného lin. prostoru nemusí být podprostor.