


Lineární prostor

- je množina L jakýchkoli objektů s operacemi $+$ a \cdot
- objekty lze sčítat mezi sebou, součet je také objekt z množiny L
- objekt lze násobit konstantou, násobek je také objekt z L
- operace sčítání a násobení splňují tzv. axiomy linearity

a) linprst, 2, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g)  Viz p. d. 4/2010

Příklady

- Funkce
- Polynomy
- Uspořádané n -tice čísel
- Orientované úsečky
- Nekonečné posloupnosti
- Reálná čísla samotná
- Komplexní čísla
- ...

BI-LIN, linprst, 2, P. Olšák [3]

Definice lineárního prostoru

Lineárním prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu L , na které je definováno sčítání $+$: $L \times L \rightarrow L$ a násobení reálným číslem \cdot : $\mathbf{R} \times L \rightarrow L$ a tyto operace splňují pro každé $\vec{x} \in L, \vec{y} \in L, \vec{z} \in L, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ vlastnosti:

- (1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- (2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- (3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
- (4) $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$
- (5) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
- (6) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- (7) existuje $\vec{o} \in L$, že pro každé $\vec{x} \in L$ je $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$

Prvky lineárního prostoru nazýváme *vektory*. Reálnému číslu v kontextu násobení \cdot : $\mathbf{R} \times L \rightarrow L$ říkáme *skalár*. Prvku $\vec{o} \in L$ z vlastnosti (7) říkáme *nulový prvek* nebo *nulový vektor*.

BI-LIN, linprst, 2, P. Olšák [4]

Jednoduché vlastnosti

Pro nulový prvek \vec{o} lineárního prostoru L platí vlastnosti:

- (1) $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in L,$
- (2) $\alpha \cdot \vec{o} = \vec{o} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R},$
- (3) Necht' $\vec{x} \in L$. Je-li $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $\alpha \neq 0$, pak $\vec{x} = \vec{o}$.

Co není lineárním prostorem

- Kvůli operacím: $(a, b) + (c, d) = (a + d, c + b), \dots$
- Kvůli množině: množina nenulových funkcí, ...

Konečné lineární prostory (nad \mathbf{R})

Jednobodový prostor (tzv. *trivální*, obsahuje jen nulový vektor)

ALE: Neexistuje konečný lineární prostor s aspoň dvěma vektory.

Neobvyklý lineární prostor

- Množina: \mathbf{R}^+ , operace: $\oplus : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\odot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad \alpha \odot x = x^\alpha$$

Lineární podprostor

je podmnožina M lineárního prostoru L , která je sama se stejnými operacemi lineárním prostorem. Vlastnosti (1) až (7) jsou zaručeny, protože tytéž operace „pracují“ v L . Nemusí být ale splněna uzavřenost operací, tedy:

Definice: Necht' L je lineární prostor s operacemi „+“ a „ \cdot “. Neprázdnou množinu $M \subseteq L$ nazýváme *lineárním podprostorem prostoru L* , pokud pro všechna $\vec{x} \in M$, $\vec{y} \in M$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí:

- (1) $\vec{x} + \vec{y} \in M$,
- (2) $\alpha \cdot \vec{x} \in M$.

Příklady lineárních podprostorů

- Polynomy v lineárním prostoru funkcí
- Polynomy nejvýše druhého stupně v lineárním prostoru polynomů
- Podmnožiny z \mathbf{R}^3 :

$$M = \{(x, y, z); x + 2y = 0, z \text{ libovolné}\} \quad \text{ANO,}$$

$$N = \{(x, y, z); 2x + y - z = 0\} \quad \text{ANO,}$$

$$S = \{(x, y, z); 2x + y - z = 3\} \quad \text{NE.}$$
- Orientované úsečky ve společné rovině procházející bodem O ,
- Orientované úsečky ve společné přímce procházející bodem O .

Průnik a sjednocení podprostorů

- Průnik podprostorů stejného lin. prostoru je vždy podprostor,
- sjednocení podprostorů stejného lin. prostoru nemusí být podprostor.