

Lineární prostor

- je množina L jakýchkoli objektů s operacemi $+$ a \cdot
- objekty lze sčítat mezi sebou, součet je také objekt z množiny L
- objekt lze násobit konstantou, násobek je také objekt z L
- operace sčítání a násobení splňují tzv. axiomy linearit

Příklady

- Funkce
- Polynomy
- Uspořádané n -tice čísel
- Orientovné úsečky
- Nekonečné posloupnosti
- Reálná čísla samotná
- Komplexní čísla
- ...

Definice lineárního prostoru

Lineárním prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu L , na které je definováno sčítání $+ : L \times L \rightarrow L$ a násobení reálným číslem $\cdot : \mathbf{R} \times L \rightarrow L$ a tyto operace splňují pro každé $\vec{x} \in L, \vec{y} \in L, \vec{z} \in L, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ vlastnosti:

$$(1) \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$(2) \quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

$$(3) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$$

$$(4) \quad \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$$

$$(5) \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$$

$$(6) \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$(7) \quad \text{existuje } \vec{o} \in L, \text{ že pro každé } \vec{x} \in L \text{ je } 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

Prvky lineárního prostoru nazýváme *vektory*. Reálnému číslu v kontextu násobení $\cdot : \mathbf{R} \times L \rightarrow L$ říkáme *skalár*. Prvku $\vec{o} \in L$ z vlastnosti (7) říkáme *nulový prvek* nebo *nulový vektor*.

Jednoduché vlastnosti

Pro nulový prvek \vec{o} lineárního prostoru L platí vlastnosti:

$$(1) \quad \vec{x} + \vec{o} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in L,$$

$$(2) \quad \alpha \cdot \vec{o} = \vec{o} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R},$$

$$(3) \quad \text{Necht' } \vec{x} \in L. \quad \text{Je-li } \alpha \cdot \vec{x} = \vec{o} \text{ a } \alpha \neq 0, \text{ pak } \vec{x} = \vec{o}.$$

Co není lineárním prostorem

- Kvůli operacím: $(a, b) + (c, d) = (a + d, c + b), \dots$
- Kvůli množině: množina nenulových funkcí, \dots

Konečné lineární prostory (nad \mathbf{R})

Jednobodový prostor (tzv. *trivilální*, obsahuje jen nulový vektor)

ALE: Neexistuje konečný lineární prostor s aspoň dvěma vektory.

Neobvyklý lineární prostor

- Množina: \mathbf{R}^+ , operace: $\oplus : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\odot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad \alpha \odot x = x^\alpha$$

Lineární podprostor

je podmnožina M lineárního prostoru L , která je sama se stejnými operacemi lineárním prostorem. Vlastnosti (1) až (7) jsou zaručeny, protože tytéž operace „pracují“ v L . Nemusí být ale splněna uzavřenost operací, tedy:

Definice: Nechť L je lineární prostor s operacemi „+“ a „·“. Neprázdnou množinu $M \subseteq L$ nazýváme *lineárním podprostorem prostoru L* , pokud pro všechna $\vec{x} \in M$, $\vec{y} \in M$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí:

$$(1) \quad \vec{x} + \vec{y} \in M,$$

$$(2) \quad \alpha \cdot \vec{x} \in M.$$

Příklady lineárních podprostorů

- Polynomy v lineárním prostoru funkcí
- Polynomy nejvýše druhého stupně v lineárním prostoru polynomů
- Podmnožiny z \mathbf{R}^3 :

$$M = \{(x, y, z); x + 2y = 0, z \text{ libovolné}\} \quad \text{ANO,}$$

$$N = \{(x, y, z); 2x + y - z = 0\} \quad \text{ANO,}$$

$$S = \{(x, y, z); 2x + y - z = 3\} \quad \text{NE.}$$

- Orientované úsečky ve společné rovině procházející bodem O ,
- Orientované úsečky ve společné přímce procházející bodem O .

Průnik a sjednocení podprostorů

- Průnik podprostorů stejného lin. prostoru je vždy podprostor,
- sjednocení podprostorů stejného lin. prostoru nemusí být podprostor.