Symetrické a kvadratické formy

Aplikace: klasifikace kvadrik($\mathbb{R}^2$) a kvadratických ploch($\mathbb{R}^3$), optimalizace(MPI)

V celé přednášce uvažujeme číselné těleso $\mathbb{R}$, ačkoliv celou látku ke kvadratickým formám lze vyložit nad obecným tělesem (obvykle $\mathbb{C}$). Dále vektor $x \in \mathbb{R}^n$ uvažujeme *sloupcový* a nad vektor nepíšeme šipku.

Definice: Zobrazení $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$, existuje-li $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ taková, že

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(Q(x) = x^T \mathbb{A} x).$$

Dále zobrazení $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$h(x, y) = x^T \mathbb{A} y$$

nazveme symetrickou formou kvadratické formy Q.

- Je-li $\mathbb{A}_{ij} = a_{ij}$, potom
$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$
- Můžeme se setkat s různými způsoby zápisu skalárního součinu:
$$x^T \mathbb{A} y = x \cdot \mathbb{A} y = (x, \mathbb{A} y).$$

Příklad 1: Zobrazení Q zadané předpisem

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$ s maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příslušná symetrická forma má tvar

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

Pozorování:

- Symetrická forma h je lineární v obou argumentech.
- Platí-li navíc $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \neq 0)(h(x,x) > 0)$ (pozitivní definitnost) je h skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

Věta: Buď Q kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a h příslušná symetrická forma. Potom pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí

1. $h(x,y) = h(y,x)$,
2. $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$,
3. $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2h(x,y)$,
4. $Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y)$, (*rovnoběžníková rovnost*),
5. $h(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$, (*polarizační identita*).

Důkaz: tabule

- Ve vzorci $Q(x) = x^T \mathbb{A} x$ vystupují souřadnice vektoru x ve standardní bázi $\mathbb{R}^n$.
- Buď $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matice přechodu od standardní báze $\mathbb{R}^n$ k bázi jiné. Víme, že pro “nové” souřadnice $x' \in \mathbb{R}^n$ platí vztah

$$x = \mathbb{P} x'.$$

- Matice kvadratické formy se přechodem k jiným souřadnicím změní! Máme totiž

$$Q(x) = x^T \mathbb{A} x = (\mathbb{P} x')^T \mathbb{A} \mathbb{P} x' = x'^T \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P} x'.$$

- Na pravé straně je kvadratická forma v nových souřadnicích s maticí

$$\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$$

(je tato matice symetrická?).

- V dalším výkladu se budeme snažit najít takovou trasformaci souřadnic (matici $\mathbb{P}$), aby matice kvadratické formy v nových souřadnicích byla diagonální.
- Tedy hledáme matici přechodu $\mathbb{P}$ takovou, že

$$\mathbb{D} = \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$$

  je diagonální matice.
- Kvadratická forma Q má potom v nových souřadnicích tzv. kanonický tvar,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} (x_i')^2.$$

- Bázi, k níž přecházíme pomocí $\mathbb{P}$ a která převádí Q na kanonický tvar, nazveme polární bází kvadratické formy Q.
- Z kvadratické formy, která bude v kanonickém tvaru, můžeme ihned vyčíst řadu jejích vlastností (ukážeme později).

Připomeňme větu z kapitoly o vlastních číslech matice:

Věta: Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, potom exituje ortogonální matice $\mathbb{P}$ a reálná diagonální matice $\mathbb{D}$ tak, že

$$\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P} = \mathbb{D}.$$

- Matice $\mathbb{P}$ obsahuje ve sloupcích vlastní vektory $\mathbb{A}$, které tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Matice $\mathbb{D}$ má na diagonále vlastní čísla $\mathbb{A}$.
- Bude-li navíc matice $\mathbb{P}$ reálná, dostaneme transformaci souřadnic převádějící $Q(x) = x^T \mathbb{A} x$ do kanonického tvaru.
- Metoda převedení kvadratické formy do kanonického tvaru založená na této větě je početně značně náročná. Vyžaduje nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ a to není explicitně možné provést pro obecnou dimenzi n.
- Ukážeme jednodušší metody založené pouze na elementárních maticových operacích, či algebraických manipulacích s kvadratickou formou.

Metoda 1:

- Řádkovými úpravami GEM převedeme $\mathbb{A}$ na horní trojúhelníkovitý tvar. Dostaneme tedy $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární tak, že $\mathbb{P}\mathbb{A}$ je horní trojúhleníková.
- Jelikož je $\mathbb{A}$ symetrická, stejné upravy aplikované na její sloupce ji převedou na dolní trojúhelníkovou matici, tedy $\mathbb{A}\mathbb{P}^T$ je dolní trojúhleníková.
- Matice $\mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^T$ je diagonální!

Metoda 1 - pokrač.:

Schématický postup výpočtu:

$$(\mathbb{E}|\mathbb{A}|\mathbb{E}) \sim \cdots \sim (\mathbb{P}|\mathbb{D}|\mathbb{P}^T),$$

- střídavě řádkové a sloupcové úpravy,
- **řádkové** pouze s maticí **vlevo**,
- **sloupcové** pouze s maticí **vpravo**.

Po dokončení výpočtu jsou matice nalevo a napravo vzájemně transponované. Je tedy nadbytečné provádět a zapisovat operace s oběma jednotkovými maticemi.

Stačí rozšířit $\mathbb{A}$ zprava jednotkovou maticí a do ní "zaznamenáme" pouze řádkové úpravy. Sloupcové úpravy provádíme pouze s $\mathbb{A}$. Pak

$$(\mathbb{A}|\mathbb{E}) \sim \cdots \sim (\mathbb{D}|\mathbb{P})$$

a matice $\mathbb{P}^T$ je matice přechodu k nové bázi. Vektory polární báze kvadratické formy Q s maticí $\mathbb{A}$ potom tvoří řádky matice $\mathbb{P}$.

Příklad 2: Převeďte kvadratickou formu Q definovanou v $\mathbb{R}^3$ do kanonického tvaru, kde

$$Q(x) = 2x_2^2 + x^3 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Popište potřebnou transformaci souřadnic a najděte polární bázi Q.

Metoda 2:

- Jiný způsob převodu kvadratické formy Q na kanonický tvar je zapsání výrazu
$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
ve tvaru součtu kvadrátů, např.,
$$Q(x) = d_1 \left(\sum_{i=1}^{n} q_{1i} x_i \right)^2 + d_2 \left(\sum_{i=2}^{n} q_{2i} x_i \right)^2 + \cdots + d_n \left(\sum_{i=n}^{n} q_{ni} x_i \right)^2 .$$
- Způsob doplňování na čtverce, někdy označovány jako Lagrangeův algoritmus, ilustrujeme na příkladech dále.
- Definujme $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tak, že
$$\mathbb{Q}_{ij} := \begin{cases} q_{ij}, & i \leq j, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$
Matice $\mathbb{Q}$ je horní trojúhleníková s nenulovými čísly na diagonále (tak ji volím!), a tedy $\mathbb{Q}$ je regulární.
- V nových souřadnicích $x' = \mathbb{Q}x$ je forma Q v kanonickém tvaru. Označíme-li $\mathbb{P} := \mathbb{Q}^{-1}$, je $\mathbb{P}$ maticí přechodu od standardní báze k polární bázi Q.

Příklad 3: Buď Q kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$ definovaná jako

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Nalezneme kanonický tvar, transformační matici a polární bázi Q.

Doplněním na čtverce získáme

$$Q(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2.$$

S pomocí tohoto vyjádření sestavme transormační matici

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici lze vždy volit regulární a pro její inverze $\mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{P}$ je maticí přechodu od standardní báze k bázi polární. Tedy sloupce matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří vektory hledané polární báze $((1,0,0),(1,1,0),(-1,1,1))$.

Příklad 4: Nalezněte polární bázi kvadratické formy Q na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Doplněním na čtverce dostaneme

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2.$$

Třetí řádek transformační matice $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{3,3}$ lze volit libovolně ale tak, aby matice $\mathbb{Q}$ byla regulární! Dobré je zachovat horní trojúhelníkovitý tvar a nenulovost diagonály $\mathbb{Q}$. Tedy můžeme volit např.

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Další postup je analogický jako v Příkladu 3.

Algoritmus doplňování na čtverce, tak jak byl vyložen, někdy nelze aplikovat hned od začátku. Totiž v případech, kdy rovnice kvadratické formy neobsahuje "kvadrát". Uvažujme příklad formy na $\mathbb{R}^3$,

$$Q(\vec{x}) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

Zde je třeba aplikovat nějakou "zahajovací substituci", která nám kvadráty vytvoří. To znamená, že vyjádříme formu Q v jiné bázi, kde již kvadráty budou. Vezměme např. $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$ a $x_3 = y_3$. Potom

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 y_3$$

a již lze aplikovat Lagrangeův algoritmus.
Pozor, transformační matici, která nám vyjde upravením $\tilde{Q}$ na čtverce je třeba ještě vynásobit zleva maticí první substituce

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takto získáme matici $\mathbb{Q}$ a můžeme pokračovat jako v Příkladu 3.

Věta(Zákon setrvačnosti kvadratických forem): Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a $(a_1, \ldots, a_n)$ je její polární báze. Nechť p, q, r je počet kladných, resp. záporných, resp. nul v posloupnosti $(Q(a_1), \ldots, Q(a_n))$. Potom uspořádaná trojice p, q, r nezávisí na volbě polární báze.

Důkaz: neuvedeme

Tedy každé dva kanonické tvary kvadratické Q mají stejný počet kladných koeficientů, stejný počet záporných koeficientů a stejný počet nulových koeficientů. Tato věta ospravedlňuje následující definici.

Definice: Čísla p, resp. q z předchozí věty nazýváme kladným, resp. záporným indexem setrvačnosti kvadratické formy Q. Dvojice (p, q) se nazývá signatura Q. Číslo $p + q$ nazveme hodnost Q.

Definice: Buď Q kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že Q je

1. pozitivně definitní (PD) $\Leftrightarrow (\forall x \in L)(x \neq 0)(Q(x) > 0)$,
2. negativně definitní (ND) $\Leftrightarrow (\forall x \in L)(x \neq 0)(Q(x) < 0)$,
3. pozitivně semidefinitní (PSD)
   $\Leftrightarrow (\forall x \in L)(Q(x) \geq 0) \wedge (\exists x_0 \in L)(x_0 \neq 0)(Q(x_0) = 0)$,
4. negativně semidefinitní (NSD)
   $\Leftrightarrow (\forall x \in L)(Q(x) \leq 0) \wedge (\exists x_0 \in L)(x_0 \neq 0)(Q(x_0) = 0)$,
5. indefinitní (IND) $\Leftrightarrow (\exists x, y \in L)((Q(x) > 0)) \wedge (Q(y) < 0))$.

Pozorování: Známe-li signaturu (p, q) kvadratické formy Q, můžeme určit její definitnost. Platí totiž:

- Q je PD $\Leftrightarrow p = n$,
- Q je ND $\Leftrightarrow q = n$,
- Q je PSD $\Leftrightarrow p < n \wedge q = 0$,
- Q je NSD $\Leftrightarrow p = 0 \wedge q < n$,
- Q je IND $\Leftrightarrow pq \neq 0$.

Pozorování: Je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, potom je vztahem

$$Q_A(x) = x^T \mathbb{A} x, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

určena kvadratická forma Q_A na $\mathbb{R}^n$.

Definice: Symetrickou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme PD, resp. ND, resp. PSD, resp. NSD, resp. IND, jestliže je Q_A PD, resp. ND, resp. PSD, resp. NSD, resp. IND.

Značení: Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k \in \hat{n}$. Potom označíme $\mathbb{A}[k] \in \mathbb{R}^{k,k}$ takovou, že $(\forall i, j \in \hat{k})(\mathbb{A}[k]_{ij} = \mathbb{A}_{ij})$. Tedy $\mathbb{A}[k]$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním $(k+1)$-ního až n-tého řádku a sloupce.

Věta (Jacobiho): Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ s maticí $\mathbb{A}$. Nechť $\forall k \in \hat{n}$ platí

$$\Delta_k := \det \mathbb{A}[k] \neq 0.$$

Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ kvadratické formy Q taková, že $\forall x \in L$ platí

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\xi_3^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2,$$

kde $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jsou souřadnice vektoru x v bázi $\mathcal{A}$.

Důkaz: konstruktivní, uvést podle časových možností

Věta (Sylvestrovo kritérium): Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ s maticí $\mathbb{A}$. Nechť

$$\Delta_k = \det \mathbb{A}[k].$$

Potom i) Q je PD právě když $(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k > 0)$,
ii) Q je ND právě když $(\forall k \in \hat{n})((-1)^k \Delta_k > 0)$.

Důkaz: podle časových možností

Důsledek: Symetrická matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je PD právě když $(\forall k \in \hat{n})$ $(\det \mathbb{A}[k] > 0)$ a ND právě když $(\forall k \in \hat{n})((-1)^k \det \mathbb{A}[k] > 0)$.

Pozn.: Existuje pododbné kritérium pro PSD/NSD, ale jeho formulace je komplikovanější a v praxi se používá zřídka.

Příklad: Rozhodněte o definitnosti matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\Delta_1 = |(1)| = 1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det \mathbb{A} = 4 > 0,$$

je podle Sylvestrova kritéria matice $\mathbb{A}$ PD.