Euklidovský prostor

- Euklidovy Základy (pohled do historie)
- dnešní definice
- kartézský souřadnicový systém
- vlastnosti „rovin“ v E_n
- speciální vlastnosti v E_3 (vektorový součin)

a) eprostor, 16, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Euklides

Euklides (jiný překlad: Eukleides) byl řecký matematik (kolem roku 300 př. n. l.).

Hlavní dílo: Euklidovy *Základy* (ve 13 kapitolách). Po Bibli nejvíce publikované dílo až do 19. století.

Pokusil se o přesné formální vyjadřování, vybudoval geometrii systémem definice, věta, důkaz. Pokusil se definovat i nedefinovatelné:

- *bod* je to, co nemá části,
- *křivka* je délka bez šířky,
- *přímka* je křivka s body, která leží rovně,
- rozdělením přímého úhlu na dva stejné vzniká úhlel *pravý*,
- ...

Euklidovy postuláty (axiomy)

Euklides si uvědomil, že některá tvrzení nelze dokázat, je nutné je předpokládat. Formuloval pět tzv. postulátů:

- Dva body určují jedinou úsečku, která v těch bodech končí.
- Každá úsečka může být prodloužena tak, že vznikne opět úsečka.
- Je možné nakreslit kružnici s libovolným středem a poloměrem.
- Všechny pravé úhly jsou si rovny.
- Jestliže přímka protíná dvě přímky tak, že vnitřní úhly na téže straně jsou menší než dva pravé úhly, pak se tyto dvě přímky protnou na stejné straně, na které jsou úhly menší než dva pravé.

Otazníky kolem pátého axiomu

Pátý axiom je formulován složitě, je v geometrii nutný?

Ukázalo se, že pátý axiom je (za předpokladu platnosti prvních čtyř) ekvivalentní s následujícími tvrzeními:

- Daným bodem lze k dané přímce vést jedinou rovnoběžku.
- Trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů 180°.
- Platí Pythagorova věta.

Později se ukázalo (Gauss, Lobačevskij, Riemann), že užitečná je i geometrie bez pátého axiomu (tzv. neeuklidovská geometrie). Například dvourozměrná geometrie na sféře: trojúhelníky mají součet úhlů větší než 180°, každé dvě „přímky“ (nejkratší spojnice dvou bodů prodloužené na obou koncích) se protínají, tj. neexistuje rovnoběžka. Neplatí Pythagorova věta.

Euklidovský prostor dnes

V euklidovském prostoru chceme pracovat s přímkami (to umíme v afinním prostoru), dále chceme v rovinách vymezit kružnice. K tomu potřebujeme měřit vzdálenosti. Potřebujeme tedy metrický prostor. Metrika musí být odvozena z Pythagorovy věty (jinak by tato věta neplatila a neplatil by pátý Euklidův axiom). Tuto vlastnost splňuje metrika odvozená ze skalárního součinu. Konečně v euklidovském prostoru potřebujeme měřit úhly. K tomu také slouží skalární součin. Dnešní definice euklidovského prostoru je tedy následující:

Definice: *Euklidovský prostor* E_n je afinní prostor $(\mathbf{X}, V)$ dimenze n, přitom V je lineární prostor se skalárním součinem. Z tohoto součinu je odvozena norma a metrika na V. Metrika na $\mathbf{X}$ je definována takto: vzdálenost bodů P, Q je rovna velikosti vektoru $P - Q$.

Základní objekty v euklidovském prostoru

- **Přímka**: $p = \{A + t\,\vec{s},\ t \in \mathbf{R}\}$, kde $A \in \mathbf{X}$, $\vec{s} \in V$, $\vec{s} \neq \vec{o}$.

Přímka je tedy dána bodem A, kterým prochází a nenulovým *směrovým vektorem* $\vec{s}$. Může být též dána dvěma body A a B:
$p = \{A + t\,(B - A),\ t \in \mathbf{R}\}$.

- **Úsečka** s koncovými body A, B: $u = \{A + t\,(B - A),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$.
- **Kružnice** se středem S a poloměrem r: $k = \{X,\ \rho(S, X) = r\}$.

Kružnici lze takto definovat jen v E_2 (dimenzi 2). Pro větší dimenze je uvedená množina povrchem n-rozměrné koule.

- **Rovina**: $\sigma = \{A + t\,\vec{a} + u\,\vec{b},\ t, u \in \mathbf{R}\}$, $A \in \mathbf{X}$, $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ jsou LN.

Rovina je dána bodem a dvěma nezávislými směry.

- **Zobecněná rovina** (afinní podprostor): $\tau = A + \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \rangle$,

Vztahy mezi přímkami

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\,\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\,\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ jsou *totožné*, právě když vektory $A_2 - A_1$ a $\vec{s}_1$ jsou LZ a současně směrové vektory $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\,\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\,\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ jsou *rovnoběžné*, právě když nejsou totožné a vektory $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\,\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\,\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ *leží ve společné rovině*, právě když vektory $A_2 - A_1$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky jsou *různoběžky* (protínají se v jednom bodě), právě když leží ve společné rovině a nejsou totožné ani rovnoběžné.

Dvě přímky jsou *mimoběžky* (míjejí se v prostoru), právě když neleží ve společné rovině.

Uvedené vztahy rozpoznáme *algebraickými metodami*: vyšetřením lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů.

Příklad

Najdeme parametr $a \in \mathbf{R}$ takový, aby se přímky
$p = (1, 2, 3) + \langle\langle (2, 2, 5) \rangle\rangle$ a $q = (4, 3, 7) + \langle\langle (3, a, 1) \rangle\rangle$ protínaly.

Řešení: Přímky nejsou rovnoběžné ani totožné, protože jejich směrové vektory jsou lineárně nezávislé. Aby tyto přímky byly různoběžkami, musí být vektory $(3, 1, 4), (2, 2, 5), (3, a, 1)$ lienárně závislé, takže když jejich souřadnice zapíšeme do řádků matice $\mathbf{A}$, musí mít tato matice nulový determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix} = -5 - 7a = 0.$$

Takže $a = -\dfrac{5}{7}$.

Zobecněná rovina: afinní podprostor

Je dán bod $A \in \mathbf{X}$ a lineárně nezávislé vektory $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k$ v afiním prostoru $(\mathbf{X}, V)$. Množině

$$M = A + \langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k \rangle$$

říkáme *zobecněná rovina*. Má dimenzi k.

Zobecněná rovina dimenze 1 je přímka.

Zobecněná rovina dimenze 2 je „skutečná“ rovina.

Pojem *zobecněná rovina* tedy zahrnuje pojmy přímka a rovina dokonce pro lineární prostory libovolné dimenze n. Zobecněná rovina je podprostor v afinním prostoru $(\mathbf{X}, V)$.

Přesněji, při označení $W = \langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k \rangle$ je dvojice (M, W) afinní podprostor: operace afinního prostoru jsou na množině M a lineárním podprostoru W uzavřeny.

Vzájemná poloha zobecněných rovin

Označme $U = \langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k \rangle$ a $V = \langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m \rangle$. Nechť A a B jsou body v afinním prostoru $(\mathbf{X}, V)$ a nechť jsou dány dvě zobecněné roviny $M = A + U$ a $N = B + V$.

- M a N jsou *totožné*, právě když $U = V$ a $A - B \in U$.
- *M je obsažena v N*, právě když $U \subseteq V$ a $A - B \in V$.

Další pojmy se týkají jen zobecněných rovin M a N takových, že žádná není obsažena v druhé.

- *M je rovnoběžná s N*, právě když $U \subseteq V$ nebo $V \subseteq U$.
- Zobecněné roviny M a N *se protínají*, právě když $A - B \in U \cup V$.
- Zobecněné roviny *jsou mimoběžné*, právě když nejsou rovnoběžné a neprotínají se.
- M a N *jsou na sebe kolmé*, právě když $\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{v}_j = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, k\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$

Kartézský souřadný systém

Nechť $E_n = (\mathbf{X}, V)$ je euklidovský prostor. *Kartézský souřadný systém* tohoto prostoru je souřadnicový systém (O, B) afinního prostoru $(\mathbf{X}, V)$ takový, že báze (B) je ortonormální.

Nechť $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou souřadnice vektorů $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ vzhledem ke **kartézkému** souřadnému systému. Pak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \\ \|\overrightarrow{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Nechť $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ jsou souřadnice bodů A a A' vzhledem ke **kartézkému** souřadnému systému. Pak vzdálenost těchto bodů se počítá „podle Pythagorovy věty“:

$$\rho(A, A') = \|A - A'\| = \sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2 + \cdots + (a_n - a'_n)^2}.$$

Idea analytické geometrie

Geometrické úlohy lze řešit algebraicky přechodem k souřadnicím vzhledem ke kartézskému souřadnému systému.

Geometrické konstrukce pravítkem a kružítkem v rovině sestávají z těchto elementárních úkonů:

- najít průsečík dvou přímek (pokud existuje),
- najít průsečík přímky s kružnicí (pokud existuje),
- najít průsečík dvou kružnic (pokud existuje).

Všechny tyto úkoly lze převést na výpočet souřadnic hledaných průsečíků vzhledem ke kartézskému souřadnicovému systému, pokud jsou dány souřadnice výchozích objektů (souřadnice bodu a směrového vektoru přímky, souřadnice středu a hodnota poloměru kružnice).

Příklad: průsečík přímek

V E_2 jsou dány přímky $p = (1,2) + \langle(3,4)\rangle$ a $q = (2,0) + \langle(1,3)\rangle$. Vektory a body jsou dány v kartézských souřadnicích. Najdeme průsečík přímek p, q.

Protože směrové vektory $(3,4)$ a $(1,3)$ jsou lineárně nezávislé, přímky se protínají (v E_2 neexistují mimoběžky). Průsečík najdeme v místě, pro které nastává rovnost:

$$(1,2) + t\,(3,4) = (2,0) + u\,(1,3)$$

To vede na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými t, u. Ta má řešení $t = 1$, $u = 2$, takže průsečík je v bodě

$$P = (1,2) + 1 \cdot (3,4) = (4,6).$$

Příklad: průsečík přímky a kružnice

V E_2 je dána přímka $p = (1,2) + \langle(3,4)\rangle$ a kružnice k se středem $(1,1)$ a poloměrem 3. Najdeme jejich průsečíky.

Vzdálenost středu kružnice od bodu $(1,2) + t\,(3,4)$ na přímce je

$$f(t) = \sqrt{(1 + 3t - 1)^2 + (2 + 4t - 1)^2} = \sqrt{25t^2 + 8t + 1}$$

Průsečík nastává v místě, kde $(f(t))^2 = 3^2$, neboli

$$25t^2 + 8t - 8 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{54}}{25},$$

takže jsme našli dva průsečíky:

$$(1,2) + \frac{-8 + \sqrt{54}}{25}(3,4) = \left(\frac{1}{25} + \frac{3\sqrt{54}}{25},\quad \frac{18}{25} + \frac{4\sqrt{54}}{25}\right),$$

$$(1,2) + \frac{-8 - \sqrt{54}}{25}(3,4) = \left(\frac{1}{25} - \frac{3\sqrt{54}}{25},\quad \frac{18}{25} - \frac{4\sqrt{54}}{25}\right).$$

Příklad: průsečík dvou kružnic

Jsou dány kružnice k_1 se středem $(1,1)$ a poloměrem 3 a kružnice k_2 se středem $(3,4)$ a poloměrem 2. Najdeme jejich průsečíky.

Průsečík má souřadnice (x,y), které vyhovují dvěma rovnicím:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

Odečtením rovnic dostáváme lineární rovnici $2x + 3y = 14$. Dosazením $x = 7 - \frac{3}{2}y$ do první rovnice dostávéme kvadratickou rovnici $13y^2 - 80y + 112 = 0$, která má řešení $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{28}{13}$. Použitím vzorce $x = 7 - \frac{3}{2}y$ dostáváme $x_1 = 1$ a $x_2 = \frac{49}{13}$, takže hledané průsečíky jsou

$$P_1 = (1,4), \qquad P_2 = \left(\frac{49}{13}, \frac{28}{13}\right).$$

Nekopírovat vždy konstrukci výpočtem

Ne vždy se vyplatí postupovat stejně jako při řešení úloh pravítkem a kružítkem jen výpočtem souřadnic postupně vznikajících průsečíků.

Například sestrojení kolmice na danou přímku p procházející daným bodem P uděláme kružítkem tak, že zapíchneme kružítko s dostatečně velkým poloměrem do P a najdeme průsečíky na p. Pak píchneme kružítko do těchto průsečíků se shodným poloměrem větším než polovina vzdálenosti průsečíků a najdeme průsečíky kružnic. Jejich spojnice je hledaná kolmice.

Analyticky ale stačí kolmici vyjádřit jako $P + \langle \vec{s}^{\perp} \rangle$, přičemž $\vec{s}^{\perp}$ je vektor kolmý na směrový vektor přímky p. Kolmý vektor k vektoru v rovině $\vec{s} = (u,v)$ je vektor $\vec{s}^{\perp} = (-v,u)$, protože skalární součin těchto dvou vektorů je nulový.

Dva popisy zobecněné roviny v $E_n,\ n \ge 3$

Zobecněná rovina M může být zadána dvěma způsoby:

- Bodem a směrovými vektory: $M = A + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle$.
- Soustavou lineárních rovnic $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ takovou, že souřadnice všech bodů zobecněné roviny M tvoří množinu jejích řešení. Tuto soustavu nazýváme *soustavou zobecněné roviny M*.

Tyto dva popisy umíme převádět jeden na druhý:

- Je-li dána soustava zobecněné roviny, pak její směrové vektory jsou bázové vektory přidružené homogenní soustavy $\mathbf{Bx} = \mathbf{o}$ a bod A je partikulární řešení soutavy.
- Je-li dána zobecněná rovina směrovými vektory, pak zapíšeme jejich souřadnice do řádků matice $\mathbf{A}$ a vyřešíme $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$. Bázi řešení zapíšeme do řádků matice $\mathbf{B}$ a pravou stranu zjistíme dosazením souřadnic bodu A za neznámý vektor $\mathbf{x}$.

Příklady popisů přímky a roviny v E_3

Přímka: Je popsána bodem a směrovým vektorem $A + \langle \vec{s} \rangle$. Často se tento popis rozepisuje do souřadnic jako

$$x = a_1 + t s_1, \quad y = a_2 + t s_2, \quad z = a_3 + t s_3, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Přímku můžeme také popsat soustavou dvou rovnic $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$. Není to typické, ale předvedeme si to. Bázi řešení soustavy s jednou rovnicí $s_1 x + s_2 y + s_3 z = 0$ označíme $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)$. Hledaná soustava má pak matici obsahující tyto dva řádky a pravou stranu:

$$b_1 = u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3, \quad b_2 = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3.$$

Rovina: Je popsána dvěma směrovými vektory $A + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Vyřešením homogenní soustavy dvou rovnic se souřadnicemi těchto vektorů v řádcích matice dostáváme bázový vektor (n_1, n_2, n_3). Rovinu pak můžeme popsat *rovnicí roviny*

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d, \quad \text{kde} \quad d = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3.$$

Průsečíky zobecněných rovin

Dvě zobecněné roviny se mohou protínat. Průnik pak tvoří bod nebo zobecněnou rovinu. Jak tento průnik nalezneme?

Sestavíme soustavu první zob. roviny $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ a druhé zob. roviny $\mathbf{B}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. Řešíme pak soustavu, která vznikne sloučením těchto dvou soustav. Soustava má rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{b}' \end{array} \right)$$

a její řešení popisuje průnik daných zobecněných rovin.

Příklad: Průnik dvou rovin $ax + by + cz = d$ a $a'x + b'y + c'z = d'$ najdeme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} a\,x + b\,y + c\,z &=& d \\ a'x + b'y + c'z &=& d' \end{array}$$

Příklad: průsečík přímky s rovinou

Je dána přímka $p = (1,2,3) + \langle (2,2,1) \rangle$ a rovina $M = (2,3,4) + \langle (3,3,1), (3,4,3) \rangle$ v E_3. Najdeme jejich průsečík.

Podle předchozí stránky bychom mohli přímku p popsat dvěma rovnicemi a rovinu M třetí rovnicí a pak vyřešit soutavu těchto tří rovnic. Ovšem v tomto případě se většinou postupuje jinak:

Rovnice roviny M má tvar $5x - 6y + 3z = 4$ a přímka p má parametrické vyjádření $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + t$. Dosadíme parametrické vyjádření přímky do rovnice roviny:

$$5\,(1 + 2t) - 6\,(2 + 2t) + 3\,(3 + t) = 4.$$

Tato rovnice s jednou proměnnou má řešení $t = 2$. Průsečík je

$$P = (1,2,3) + 2\,(2,2,1) = (5,6,5).$$

Kolmice k zobecněné rovině v E_n

Je dána zobecněná rovina dimenze k:

$$M = A + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle.$$

Kolmice k M vedená z bodu B je zobecněná rovina N dimenze $n-k$, kterou lze zapsat ve tvaru

$$N = B + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle^\perp = B + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-k} \rangle.$$

přičemž vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-k}$ získáme následovně: Zvolíme kartézský souřadný systém a souřadnice vektorů vzhledem k tomuto souřadnému systému ztotožníme s vektory samotnými. Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-k}$ pak tvoří bázi řešení homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$.

Příklady: V euklidovském prostoru E_3 je kolmice k rovině přímka a kolmice ke přímce je rovina.

Kolmice ve 2D a 3D

Kolmici v E_n počítáme řešením homogenní soustavy, jak bylo zmíněno na předchozí stránce. To je univerzální postup.

V případě E_2 a E_3 jsou ještě jiné postupy:

- V E_2 platí: $\langle (a,b) \rangle^\perp = \langle (-b,a) \rangle$.
- V E_3 platí pro lin. nezávislé vektory:

  $$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^\perp = \langle \vec{u} \times \vec{v} \rangle,$$

  kde symbolem $\times$ je označem *vektorový součin*. O něm si povíme více později.

Kolmý průmět bodu do zobecněné roviny

Je dána zobecněná rovina $M = A + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle$ a bod B (typicky mimo M). Najdeme bod $B' \in M$ takový, že $B - B'$ je vektor kolmý na M. Bodu B' říkáme *kolmý průmět bodu B do zobecněné roviny M*.

Bod B' lze najít takto: sestrojíme kolmici $K = B + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle^\perp$. Průnik $M \cap K$ obsahuje jediný bod B'.

Jiný postup*: skalárním součinem lze počítat kolmý průmět vektoru na vektor. Označme symbolem p_i kolmý průmět vektoru $B-A$ na vektor $\vec{u}_i$. Pak je $B' = A + \sum p_i \, (\vec{u}_i / \|\vec{u}_i\|)$.

Pozorování: V bodě B' má zobecněná rovina M nejmenší vzdálenost od bodu B.

Důkaz: Je-li $C \in M$, pak $BB'C$ tvoří pravoúhlý trojúhelník a můžeme použít Pythagorovu větu.

Kolmý průmět zob. roviny do zob. roviny

Představme si, že například hledáme kolmý průmět přímky do roviny. Nebo děláme něco podobného ve více dimenzích...

Kolmý průmět zob. roviny $N = B + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle$ do zob. roviny $M = A + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle$ spočítáme v následujících krocích:

- Najdeme $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle^\perp = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-k} \rangle$.
- Označme $K = B + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-k} \rangle$. Je to zobecněná rovina, která je nejmenší taková, že obsahuje zobecněnou rovinu N a současně obsahuje směr kolmý na M.
- Hledaný kolmý průmět je průnik $M \cap K$.

Příklad: Kolmý průmět

Je dána přímka $p = (1,2,3) + \langle(5,2,2)\rangle$. Najdeme kolmý průmět této přímky do roviny $M = (2,2,1) + \langle(1,3,4),(3,2,6)\rangle$. Souřadnice jsou dány vzhledem ke kartézskému souřadnému systému.

Řešením homogenní soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

je $\langle(10,6,-7)\rangle$, takže $\langle(1,3,4),(3,2,6)\rangle^\perp = \langle(10,6,-7)\rangle$. Kolmá rovina k M obsahující p je $K = (1,2,3) + \langle(5,2,2),(10,6,-7)\rangle$. Rovnice roviny M je $10x + 6y - 7z = 25$ a rovnice K je $-26x + 55y + 10z = 114$. Hledaný průmět je řešení soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 6 & -7 & 25 \\ -26 & 55 & 10 & 114 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 6 & -7 & 25 \\ 0 & 353 & -41 & 895 \end{array}\right).$$

Hledaný průmět je $p' = (-524/41,\ 0,\ -895/41) + \langle(445,\ 41,\ 353)\rangle$.

Determinant měří objem rovnoběžnostěnu

Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jsou vektory, které tvoří hrany pomyslného n-dimenzionálního rovnoběžnostěnu. Vektory tvoří jen hrany, které se potkávají ve společném vrcholu. Ostatní hrany rovnoběžnostěnu je třeba dorýsovat doplněním na rovnoběžníky.

Tvrzení: Zapíšeme-li do sloupců matice $\mathbf{A}$ souřadnice vektorů $\vec{v}_i$ vzhledem k ortonormální bázi (B), pak absolutní hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ je rovna objemu zmíněného rovnoběžnostěnu.

Idea důkazu*: Jsou-li vektory LZ, pak je zřejmě objem nulový a je $\det\mathbf{A} = 0$. Jsou-li $\vec{v}_i$ LN, tvoří bázi a je možné ji Schmidtovým ortogonalizačním procesem upravit na ortonormální bázi (C). Napíšeme do sloupců matice $\mathbf{R}$ souřadnice $\vec{v}_i$ vzhledem k (C). Pak $\det\mathbf{R}$ je roven objemu rovnoběžnostěnu (důkaz indukcí, v indukčním kroku se použije vzorec „základna krát výška“). Matice přechodu od (B) k (C) je ortogonální a je tedy

$$\det\mathbf{A} = \det(\mathbf{P}_{B\to C}\cdot\mathbf{R}) = \det\mathbf{P}_{B\to C}\det\mathbf{R} = \pm 1\cdot\det\mathbf{R}$$

Příklady

Souřadnice uvedených bodů jsou v těchto příkladech vzhledem ke kartézskému souřadnému systému.

Plocha rovnoběžníka s vrcholy $(0,0)$, (a,b) (c,d), $(a+c, b+d)$ je rovna

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|,$$

Objem čtyřstenu s vrcholy $(0,0,0)$, (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3) je roven

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|,$$

protože čtyřstěn má objem roven jedné šestině objemu rovnoběžnostěnu.

Souřadnice můžeme zapsat i do řádků, protože $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T$.

Orientace lineárního prostoru

V lineárním prostoru zvolíme jednu uspořádanou bázi (B) a prohlásíme ji kladně orientovanou. Všechny báze (C), pro které je $\det\mathbf{P}_{B\to C} > 0$, nazveme také kladně orientované. Všechny báze (C'), pro které je $\det\mathbf{P}_{B\to C'} < 0$, nazveme záporně orientované.

Obvyklá úmluva pro E_2: kladně orientovaná báze má druhý bázový vektor směřující vlevo od prvního.

Obvyklá úmluva pro E_3: když se na bázi díváme z vhodného místa, pak kladně orientovaná báze má první vektor orientovaný k nám, druhý doprava od nás a třetí nahoru.

Pozorovnání: determinant použitý při výpočtu objemu rovnoběžnostěnu je záporný, když souřadnice vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jsou zapsány vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi a vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ samotné tvoří záporně orientovanou bázi.

Speciální vlastnosti v E_3

- Je možné definovat *vektorový součin*.
- Kolmice k rovině je přímka, směrový vektor této kolmice je *normálový vektor roviny*.
- Normálový vektor je možné hledat pomocí vektorového součinu.
- Rovina je dána jedinou rovnicí se třemi neznámými, koeficienty této rovnice jsou souřadnice jejího normálového vektoru.

Vektorový součin

Definice: Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ z E_3 značíme $\vec{u} \times \vec{v}$ a je to:

- nulový vektor, pokud jsou $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně závislé, jinak:
- vektor kolmý na rovinu $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ s velikostí plochy rovnoběžníka mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Báze $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ je kladně orientovaná.

Pozorování: Vektorový součin je definován jednoznačně.
Platí $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Věta: Jsou-li (u_1, u_2, u_3) a (v_1, v_2, v_3) souřadnice vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi, pak $\vec{u} \times \vec{v}$ má vzhledem k této bázi souřadnice:

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Důkaz*: technický, viz skriptum.

Příklad: normálový vektor roviny

Je dána rovina $(2,2,2) + \langle (1,2,3), (3,1,1) \rangle$. Najedeme její normálový vektor. Souřadnice jsou uvedeny vzhledem ke kladně orientovanému kartézskému souřadnému systému.

Normálový vektor je roven vektorovému součinu $(1,2,3) \times (3,1,1)$, protože ten je (podle definice) kolmý na oba směrové vektory. Podle věty o souřadnicích vektorového součinu je

$$(1,2,3) \times (3,1,1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 8, -5)$$

Rovnice roviny tedy je $-x + 8y - 5z = 4$.

Jiná možnost, jak najdeme normálový vektor: vyřešíme homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad: rovina daná třemi body

Jsou-li dány tři body A, B, C, které neleží ve společné přímce, pak jimi prochází jediná rovina $A + \langle (B-A), (C-A) \rangle$. Normálový vektor roviny je $(B-A) \times (C-A)$.

Třeba jsou dány body $(1,1,2), (2,3,5), (4,2,3)$ v kartézských souřadnicích. Pak rovina je dána vzorcem:

$$(1,1,2) + \langle (1,2,3), (3,1,1) \rangle$$

Protože $(1,2,3) \times (3,1,1) = (-1,8,-5)$, má rovina tento normálový vektor. Má tedy rovnici

$$-x + 8y - 5z = d, \qquad \text{přitom} \quad d = -1 + 8 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -3.$$

Příklad: vzdálenost bodu od přímky

Můžeme najít kolmý průmět bodu B do přímky (označíme B') a dále spočítáme velikost vektoru $B - B'$. Ovšem v E_3 máme vektorový součin a můžeme úlohu řešit ještě jinak (efektivněji):

Vzdálenost bodu B od přímky $A + \langle \overrightarrow{s} \rangle$ je výška rovnoběžníka vymezeného vektory $B - A$, $\overrightarrow{s}$ a ta je rovna ploše rovnoběžníka dělená velikostí základny. Vzdálenost bodu B od přímky tedy je

$$\frac{\|(B-A) \times \overrightarrow{s}\|}{\|\overrightarrow{s}\|}.$$

Příklad: vzdálenost bodu od roviny

Můžeme najít kolmý průmět bodu B do roviny (označíme B') a dále spočítáme velikost vektoru $B - B'$. Ovšem v E_3 máme vektorový součin a můžeme úlohu řešit ještě jinak (efektivněji):

Vzdálenost bodu B od roviny $A + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ je rovna výšce rovnoběžnostěnu se stranami $B - A$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ s podstavou $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Tato výška je rovna objemu tohoto rovnoběžnostěnu děleno plocha podstavy. Vzdálenost bodu B od roviny tedy je

$$\frac{\det \mathbf{A}}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích (nebo ve sloupcích) souřadnice vektorů $A - B$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi.

Příklad: vzdálenost mimoběžek

Vzdálenost mimoběžek $A + \langle \overrightarrow{u} \rangle$ a $B + \langle \overrightarrow{v} \rangle$ je rovna výšce rovnoběžnostěnu vymezeného vektory $B - A$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ se základnou $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Takže vzdálenost je rovna objemu tohoto rovnoběžnostěnu deleno plochou základny:

$$\frac{\det \mathbf{A}}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích (nebo ve sloupcích) souřadnice vektorů $A - B$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi.

Příklad: kolmice v E_3

- Kolmice k přímce je rovina, která má normálový vektor rovný směrovému vektoru přímky.
- Kolmice k rovině je přímka, která má směrový vektor rovný normálovému vektoru roviny.

Rovina daná rovnicí $ax + by + cz = d$ má normálový vektor (a, b, c), takže přechod od roviny ke kolmé přímce nebo od přímky ke kolmé rovině je snadný.

Úhly mezi přímkami a rovinami

Úhel ϕ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vypočítáme ze vzorce pro skalární součin

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}, \quad \text{tj.} \quad \phi = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

- Úhel mezi dvěma přímkami je úhlel mezi směrovými vektory. Pokud $\phi > 90^\circ$, je hledaný úhel $180^\circ - \phi$
  (nebo ve vzorci v čitateli použít absolutní hodnotu).
- Úhel mezi rovinami je úhel mezi jejich normálovými vektory. Pokud $\phi > 90^\circ$, je hledaný úhel $180^\circ - \phi$
  (nebo ve vzorci v čitateli použít absolutní hodnotu).
- Úhel mezi přímkou a rovinou je 90° mínus úhel mezi směrovým vektorem přímky a normálovým vektorem roviny (ve vzorci v čitateli je třeba použít absolutní hodnotu).

Příklad: plocha trojúhelníka ABC

Trojúhelník má plochu poloviční ploše rovnoběžníka.

- V E_2 spočítáme plochu rovnoběžníka jako „objem rovnoběžnostěnu v E_2“, tedy spočítáme absolutní hodnotu determinantu matice $\mathbf{A}$, která obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů $B-A$, $C-A$ vzhledem k ortonormální bázi.

Příklad: $A = (1,2)$, $B = (3,4)$, $C = (5,8)$. Plocha trojúhelníka je:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right| = 2$$

- V E_3 spočítáme plochu rovnoběžníka jeko velikost vektorového součinu vektorů $B-A$, $C-A$.

Příklad: $A = (1,2,2)$, $B = (2,3,4)$, $C = (7,8,9)$.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\|(1,1,2)\times(6,6,7)\| = \frac{1}{2}\|(-5,5,0)\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Úvaha*: k-dimensionální objem v E_n.

Jak spočítat např. plochu rovnoběžníka v E_4? Tam to není ani objem rovnoběžnostěnu, ani nemáme možnost použít vektorový součin. Odpověď najdeme v důkazu ze stránky [26].

Úloha: Jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ v E_n, $k \le n$. Máme najít k-dimensionální objem v E_n.

Řešení: Vektory doplníme na bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n$ a zapíšeme jejich souřadnice do sloupců matice $\mathbf{A}$. Provedeme QR rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Matici $\mathbf{R}$ „zmenšíme“ na matici $\mathbf{R}_k$, která obsahuje jen prvních k řádků a k sloupců. Hledaný k dimenzionální objem je roven $\det \mathbf{R}_k$.

Poznámka: doplnění na bázi není prakticky potřeba dělat. Software dokáže provést i neúplný QR rozklad obdélníkové matice $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k$. Zde matice $\mathbf{A}$ obsahuje ve sloupcích jen souřadnice vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.