Euklidovský prostor

Stručnější verze

- definice Eulidovského prostoru
- kartézský souřadnicový systém
- vektorový součin v E_3
- vlastnosti přímek a rovin v E_3

a) eprostor-v2, 16, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2013, d) BI-LIN, e) L, f) 2012/2013, g) . Viz p. d. 4/2010

Euklidovský prostor

Definice: Nechť V je lineární prostor dimenze n se skalárním součinem. Pak afinní prostor $(\mathbf{X}, V)$ nazýváme *euklidovským prostorem* dimenze n a značíme ho E_n.

Skalární součin na V indukuje normu (velikost): $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}$.

Vzdálenost bodů P a Q euklidovského prostoru je definována jako $\|P - Q\|$.

Poznámka: Při geometrické interpretaci euklidovského prostoru se za skalární součin vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in U_O$ použije vzorec:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha,$$

kde $|\overrightarrow{u}|$, $|\overrightarrow{v}|$ je „změřená velikost“ orientovaných úseček $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a α je „změřený úhel“ mezi těmito úsečkami. Tento skalární součin indukuje normu $\|\overrightarrow{u}\| = |\overrightarrow{u}|$, tj. velikost = „změřená velikost“.

Kartézský souřadnicový systém

Definice: Nechť $E_n = (\mathbf{X}, V)$ je euklidovský prostor. Je-li báze B lineárního prostoru V ortonormální, nazývá se souřadný systém (O, B) *kartézský*.

Pozorování: Nechť $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou souřadnice vektorů $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ vzhledem ke **kartézkému** souřadnému systému. Pak

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nechť $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ jsou souřadnice bodů A a A' vzhledem ke **kartézkému** souřadnému systému. Pak vzdálenost těchto bodů se počítá „podle Pythagorovy věty“:

$$\rho(A, A') = \|A - A'\| = \sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2 + \cdots + (a_n - a'_n)^2}.$$

Základní objekty v euklidovském prostoru

- **Přímka**: $p = \{A + t\overrightarrow{s},\ t \in \mathbf{R}\}$, kde $A \in \mathbf{X}$, $\overrightarrow{s} \in V$, $\overrightarrow{s} \neq \overrightarrow{o}$.

Přímka je tedy dána bodem A, kterým prochází a nenulovým *směrovým vektorem* $\overrightarrow{s}$. Může být též dána dvěma různými body A a B: $p = \{A + t(B - A),\ t \in \mathbf{R}\}$.

- **Úsečka** s koncovými body A, B: $u = \{A + t(B - A),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$.

- **Kružnice** se středem S a poloměrem r: $k = \{X,\ \|X - S\| = r\}$.

Kružnici lze takto definovat jen v E_2 (dimenzi 2). Pro větší dimenze je uvedená množina povrchem n-rozměrné koule.

- **Rovina**: $\sigma = \{A + t\overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b},\ t, u \in \mathbf{R}\}$, $A \in \mathbf{X}$, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ jsou LN.

Rovina je dána bodem a dvěma nezávislými směry.

- **Zobecněná rovina** (afinní podprostor): $\tau = A + \langle \overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k \rangle$,

Vztahy mezi přímkami

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ jsou *totožné*, právě když vektory $A_2 - A_1$ a $\vec{s}_1$ jsou LZ a současně směrové vektory $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ jsou *rovnoběžné*, právě když nejsou totožné a vektory $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky $p = \{A_1 + t\vec{s}_1,\ t \in \mathbf{R}\}$ a $q = \{A_2 + t\vec{s}_2,\ t \in \mathbf{R}\}$ *leží ve společné rovině*, právě když vektory $A_2 - A_1$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ jsou LZ.

Dvě přímky jsou *různoběžky* (protínají se v jednom bodě), právě když leží ve společné rovině a nejsou totožné ani rovnoběžné.

Dvě přímky jsou *mimoběžky* (míjejí se v prostoru), právě když neleží ve společné rovině.

Uvedené vztahy rozpoznáme *algebraickými metodami*: vyšetřením lineární závislosti nebo nezávislosti odpovídajících vektorů.

Příklad

Najdeme parametr $a \in \mathbf{R}$ takový, aby se přímky $p = (1,2,3) + \langle(2,2,5)\rangle$ a $q = (4,3,7) + \langle(3,a,1)\rangle$ protínaly.

Řešení: Přímky nejsou rovnoběžné ani totožné, protože jejich směrové vektory jsou lineárně nezávislé. Aby tyto přímky byly různoběžkami, musí být vektory $(3,1,4), (2,2,5), (3,a,1)$ lienárně závislé, takže když jejich souřadnice zapíšeme do řádků matice $\mathbf{A}$, musí mít tato matice nulový determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix} = -5 - 7a = 0.$$

Takže $a = -\dfrac{5}{7}$.

Příklad: průsečík přímek

V E_2 jsou dány přímky $p = (1,2) + \langle(3,4)\rangle$ a $q = (2,0) + \langle(1,3)\rangle$. Vektory a body jsou dány v kartézských souřadnicích. Najdeme průsečík přímek p, q.

Protože směrové vektory $(3,4)$ a $(1,3)$ jsou lineárně nezávislé, přímky se protínají (v E_2 neexistují mimoběžky). Průsečík najdeme v místě, pro které nastává rovnost:

$$(1,2) + t\,(3,4) = (2,0) + u\,(1,3)$$

To vede na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými t, u. Ta má řešení $t = 1$, $u = 2$, takže průsečík je v bodě

$$P = (1,2) + 1 \cdot (3,4) = (4,6).$$

Příklad: průsečík dvou kružnic

Jsou dány kružnice k_1 se středem $(1, 1)$ a poloměrem 3 a kružnice k_2 se středem $(3, 4)$ a poloměrem 2. Najdeme jejich průsečíky.

Průsečík má souřadnice (x, y), které vyhovují dvěma rovnicím:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

Odečtením rovnic dostáváme lineární rovnici $2x + 3y = 14$. Dosazením $x = 7 - \frac{3}{2}y$ do první rovnice dostávéme kvadratickou rovnici $13y^2 - 80y + 112 = 0$, která má řešení $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{28}{13}$. Použitím vzorce $x = 7 - \frac{3}{2}y$ dostáváme $x_1 = 1$ a $x_2 = \frac{49}{13}$, takže hledané průsečíky jsou

$$P_1 = (1, 4), \qquad P_2 = \left(\frac{49}{13}, \frac{28}{13}\right).$$

Příklady popisů přímky a roviny v E_3

Přímka: Je popsána bodem a směrovým vektorem $A + \langle \overrightarrow{s} \rangle$. Často se tento popis rozepisuje do souřadnic jako

$$x = a_1 + t\,s_1, \quad y = a_2 + t\,s_2, \quad z = a_3 + t\,s_3, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Přímku můžeme také popsat soustavou dvou rovnic $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$. Není to typické, ale předvedeme si to. Bázi řešení soustavy s jednou rovnicí $s_1\,x + s_2\,y + s_3\,z = 0$ označíme $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)$. Hledaná soustava má pak matici obsahující tyto dva řádky a pravou stranu:

$$b_1 = u_1\,a_1 + u_2\,a_2 + u_3\,a_3, \quad b_2 = v_1\,a_1 + v_2\,a_2 + v_3\,a_3.$$

Rovina: Je popsána dvěma směrovými vektory $A + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$. Vyřešením homogenní soustavy dvou rovnic se souřadnicemi těchto vektorů v řádcích matice dostáváme bázový vektor (n_1, n_2, n_3). Rovinu pak můžeme popsat *rovnicí roviny*

$$n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z = d, \quad \text{kde} \quad d = n_1\,a_1 + n_2\,a_2 + n_3\,a_3.$$

Příklad: průsečík přímky s rovinou

Je dána přímka $p = (1,2,3) + \langle(2,2,1)\rangle$ a rovina $M = (2,3,4) + \langle(3,3,1),(3,4,3)\rangle$ v E_3. Najdeme jejich průsečík.

Podle předchozí stránky bychom mohli přímku p popsat dvěma rovnicemi a rovinu M třetí rovnicí a pak vyřešit soutavu těchto tří rovnic. Ovšem v tomto případě se většinou postupuje jinak:

Rovnice roviny M má tvar $5x - 6y + 3z = 4$ a přímka p má parametrické vyjádření $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + t$. Dosadíme parametrické vyjádření přímky do rovnice roviny:

$$5\,(1 + 2t) - 6\,(2 + 2t) + 3\,(3 + t) = 4.$$

Tato rovnice s jednou proměnnou má řešení $t = 2$. Průsečík je

$$P = (1,2,3) + 2\,(2,2,1) = (5,6,5).$$

Kolmice ve 2D a 3D

Bázi prostoru kolmého k prostoru $\langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k \rangle$ v E_n počítáme řešením homogenní soustavy. To je univerzální postup.

Ovšem v případě E_2 a E_3 jsou ještě jiné postupy:

- V E_2 platí: $\langle (a, b) \rangle^\perp = \langle (-b, a) \rangle$.
- V E_3 platí pro lin. nezávislé vektory:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^\perp = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle,$$

kde symbolem $\times$ je označem *vektorový součin*. O něm si povíme více později.

Příklad: Kolmý průmět

Je dána přímka $p = (1,2,3) + \langle(5,2,2)\rangle$. Najdeme kolmý průmět této přímky do roviny $M = (2,2,1) + \langle(1,3,4),(3,2,6)\rangle$. Souřadnice jsou dány vzhledem ke kartézskému souřadnému systému.

Řešením homogenní soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

je $\langle(10,6,-7)\rangle$, takže $\langle(1,3,4),(3,2,6)\rangle^\perp = \langle(10,6,-7)\rangle$. Kolmá rovina k M obsahující p je $K = (1,2,3)+\langle(5,2,2),(10,6,-7)\rangle$. Rovnice roviny M je $10x+6y-7z = 25$ a rovnice K je $-26x+55y+10z = 114$. Hledaný průmět je řešení soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 6 & -7 & 25 \\ -26 & 55 & 10 & 114 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 6 & -7 & 25 \\ 0 & 353 & -41 & 895 \end{array}\right).$$

Hledaný průmět je $p' = (-524/41,\ 0,\ -895/41) + \langle(445,\ 41,\ 353)\rangle$.

Determinant měří objem rovnoběžnostěnu

Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jsou vektory, které tvoří hrany pomyslného n-dimenzionálního rovnoběžnostěnu. Vektory tvoří jen hrany, které se potkávají ve společném vrcholu. Ostatní hrany rovnoběžnostěnu je třeba dorýsovat doplněním na rovnoběžníky.

Tvrzení: Zapíšeme-li do sloupců matice $\mathbf{A}$ souřadnice vektorů $\vec{v}_i$ vzhledem k ortonormální bázi (B), pak absolutní hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ je rovna objemu zmíněného rovnoběžnostěnu.

Důkaz neuvádíme.

Příklady

Souřadnice uvedených bodů jsou v těchto příkladech vzhledem ke kartézskému souřadnému systému.

Plocha rovnoběžníka s vrcholy $(0,0)$, (a,b) (c,d), $(a+c, b+d)$ je rovna

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|,$$

Objem čtyřstenu s vrcholy $(0,0,0)$, (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3) je roven

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|,$$

protože čtyřstěn má objem roven jedné šestině objemu rovnoběžnostěnu.

Souřadnice můžeme zapsat i do řádků, protože $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

Orientace lineárního prostoru

V lineárním prostoru zvolíme jednu uspořádanou bázi (B) a prohlásíme ji kladně orientovanou. Všechny báze (C), pro které je $\det \mathbf{P}_{B\to C} > 0$, nazveme také kladně orientované. Všechny báze (C'), pro které je $\det \mathbf{P}_{B\to C'} < 0$, nazveme záporně orientované.

Obvyklá úmluva pro E_2: kladně orientovaná báze má druhý bázový vektor směřující vlevo od prvního.

Obvyklá úmluva pro E_3: když se na bázi díváme z vhodného místa, pak kladně orientovaná báze má první vektor orientovaný k nám, druhý doprava od nás a třetí nahoru.

Pozorovnání: determinant použitý při výpočtu objemu rovnoběžnostěnu je záporný, když souřadnice vektorů $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ jsou zapsány vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi a vektory $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ samotné tvoří záporně orientovanou bázi.

Speciální vlastnosti v E_3

- Je možné definovat *vektorový součin*.
- Kolmice k rovině je přímka, směrový vektor této kolmice je *normálový vektor roviny*.
- Normálový vektor je možné hledat pomocí vektorového součinu.
- Rovina je dána jedinou rovnicí se třemi neznámými, koeficienty této rovnice jsou souřadnice jejího normálového vektoru.

Vektorový součin

Definice: Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ z E_3 značíme $\vec{u} \times \vec{v}$ a je to:

- nulový vektor, pokud jsou $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně závislé, jinak:
- vektor kolmý na rovinu $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ s velikostí plochy rovnoběžníka mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Báze $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ je kladně orientovaná.

Pozorování: Vektorový součin je definován jednoznačně.
Platí $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin \alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Věta: Jsou-li (u_1, u_2, u_3) a (v_1, v_2, v_3) souřadnice vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi, pak $\vec{u} \times \vec{v}$ má vzhledem k této bázi souřadnice:

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Důkaz*: technický, viz skriptum.

Příklad: normálový vektor roviny

Je dána rovina $(2,2,2) + \langle(1,2,3), (3,1,1)\rangle$. Najedeme její normálový vektor. Souřadnice jsou uvedeny vzhledem ke kladně orientovanému kartézskému souřadnému systému.

Normálový vektor je roven vektorovému součinu $(1,2,3)\times(3,1,1)$, protože ten je (podle definice) kolmý na oba směrové vektory. Podle věty o souřadnicích vektorového součinu je

$$(1,2,3)\times(3,1,1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 8, -5)$$

Rovnice roviny tedy je $-x + 8y - 5z = 4$.

Jiná možnost, jak najdeme normálový vektor: vyřešíme homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad: rovina daná třemi body

Jsou-li dány tři body A, B, C, které neleží ve společné přímce, pak jimi prochází jediná rovina $A + \langle (B-A), (C-A) \rangle$. Normálový vektor roviny je $(B-A) \times (C-A)$.

Třeba jsou dány body $(1,1,2), (2,3,5), (4,2,3)$ v kartézských souřadnicích. Pak rovina je dána vzorcem:

$$(1,1,2) + \langle (1,2,3),\ (3,1,1) \rangle$$

Protože $(1,2,3) \times (3,1,1) = (-1,8,-5)$, má rovina tento normálový vektor. Má tedy rovnici

$$-x + 8y - 5z = d, \qquad \text{přitom} \quad d = -1 + 8 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -3.$$

Příklad: vzdálenost bodu od přímky

Můžeme najít kolmý průmět bodu B do přímky (označíme B') a dále spočítáme velikost vektoru $B-B'$. Ovšem v E_3 máme vektorový součin a můžeme úlohu řešit ještě jinak (efektivněji):

Vzdálenost bodu B od přímky $A+\langle \overrightarrow{s} \rangle$ je výška rovnoběžníka vymezeného vektory $B-A$, $\overrightarrow{s}$ a ta je rovna ploše rovnoběžníka dělená velikostí základny. Vzdálenost bodu B od přímky tedy je

$$\frac{\|(B-A)\times \overrightarrow{s}\|}{\|\overrightarrow{s}\|}\,.$$

Příklad: vzdálenost bodu od roviny

Můžeme najít kolmý průmět bodu B do roviny (označíme B') a dále spočítáme velikost vektoru $B - B'$. Ovšem v E_3 máme vektorový součin a můžeme úlohu řešit ještě jinak (efektivněji):

Vzdálenost bodu B od roviny $A + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ je rovna výšce rovnoběžnostěnu se stranami $B - A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ s podstavou $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. Tato výška je rovna objemu tohoto rovnoběžnostěnu děleno plocha podstavy. Vzdálenost bodu B od roviny tedy je

$$\frac{|\det \mathbf{A}|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích (nebo ve sloupcích) souřadnice vektorů $A - B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi.

Příklad: vzdálenost mimoběžek

Vzdálenost mimoběžek $A + \langle \vec{u} \rangle$ a $B + \langle \vec{v} \rangle$ je rovna výšce rovnoběžnostěnu vymezeného vektory $B - A$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ se základnou $\vec{u}$, $\vec{v}$. Takže vzdálenost je rovna objemu tohoto rovnoběžnostěnu děleno plochou základny:

$$\frac{\det \mathbf{A}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích (nebo ve sloupcích) souřadnice vektorů $A - B$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi.

Úhly mezi přímkami a rovinami

Úhel ϕ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vypočítáme ze vzorce pro skalární součin

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}, \quad \text{tj.} \quad \phi = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

- Úhel mezi dvěma přímkami je úhlel mezi směrovými vektory. Pokud $\phi > 90^\circ$, je hledaný úhel $180^\circ - \phi$ (nebo ve vzorci v čitateli použít absolutní hodnotu).
- Úhel mezi rovinami je úhel mezi jejich normálovými vektory. Pokud $\phi > 90^\circ$, je hledaný úhel $180^\circ - \phi$ (nebo ve vzorci v čitateli použít absolutní hodnotu).
- Úhel mezi přímkou a rovinou je 90° mínus úhel mezi směrovým vektorem přímky a normálovým vektorem roviny (ve vzorci v čitateli je třeba použít absolutní hodnotu).

Příklad: plocha trojúhelníka ABC

Trojúhelník má plochu poloviční ploše rovnoběžníka.

- V E_2 spočítáme plochu rovnoběžníka jako „objem rovnoběžnostěnu v E_2“, tedy spočítáme absolutní hodnotu determinantu matice $\mathbf{A}$, která obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů $B-A$, $C-A$ vzhledem k ortonormální bázi.

Příklad: $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,8)$. Plocha trojúhelníka je:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right| = 2$$

- V E_3 spočítáme plochu rovnoběžníka jeko velikost vektorového součinu vektorů $B-A$, $C-A$.

Příklad: $A=(1,2,2)$, $B=(2,3,4)$, $C=(7,8,9)$.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\,\|(1,1,2)\times(6,6,7)\| = \frac{1}{2}\,\|(-5,5,0)\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$