Determinant

- je číslo jistým způsobem charakterizující čtvercovou matici
- $\det \mathbf{A} = 0$ pro singulární matici, $\det \mathbf{A} \neq 0$ pro regulární matici
- používá se při řešení lineárních soustav
- … a v mnoha dalších aplikacích

Definice determinantu

Definice: Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n,n}$ je čtvercová matice. Číslo

$$\sum_{\text{permutace } \pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

nazýváme *determinantem matice* $\mathbf{A}$ a značíme je $\det \mathbf{A}$.

Poznámka: Abychom tomu vzorci porozumněli a dokázali z něj odvodit základní vlastnosti determinantů, potřebujeme si připomenout vlastnosti permutací…

Permutace

Permutace n prvků je uspořádaná n-tice čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, přitom každé číslo je v n-tici zastoupeno právě jednou.

Příklad: $(3, 1, 2, 5, 4)$ je permutace pěti prvků.

$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je permutace z n prvků, pokud $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $i_j \neq i_k$ pro $j \neq k$.

Jiný pohled: Permutace je bijektivní zobrazení na $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Vztah mezi těmito pohledy: Je-li dána n-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, pak je dáno zobrazení $z : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ předpisem $z(j) = i_j$. Je-li dáno zobrazení z, pak lze sestrojit n-tici $(z(1), z(2), \ldots, z(n))$.

Permutace, vlastnosti

- Skládáním permutací (jako zobrazení) dostáváme permutaci.
- Generická (jednotková) permutace je $(1, 2, \dots, n)$.
- Každá permutace má svou inverzní permutaci.
- Počet permutací n prvků je $n!$.

Znaménko permutace

inverze v permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je výskyt jevu:

$$i_j > i_k \text{ a současně } j < k.$$

Příklad: inverze permutace $(3, 1, 2, 5, 4)$ jsem vyznačil pomocí obloučků:

$$(\overparen{\overparen{3, 1}, 2}, \overparen{5, 4})$$

Tato permutace má tři inverze.

Definice: Má-li permutace π sudý počet inverzí, je $\operatorname{sgn}\pi = +1$, má-li π lichý počet inverzí, je $\operatorname{sgn}\pi = -1$.
Číslu $\operatorname{sgn}\pi$ říkáme *znaménko permutace*.

Příklad: $\operatorname{sgn}(3, 1, 2, 5, 4) = -1$.
Znaménko generické permutace je $+1$.

Cvičení: jaké znaménko má permutace $(n, n-1, \ldots, 3, 2, 1)$?

Přechod sudá – lichá

Prohození dvou prvků v permutaci změní znaménko permutace.

Důkaz: V následující permutaci prohodím prvky x a y:

$$(\ldots \text{prvky vlevo} \ldots, x, \ldots \text{prvky uvnitř} \ldots, y, \ldots \text{prvky vpravo} \ldots)$$

Inverze, které nenavazují na prvek x nebo y zůstávají nezměněny. Inverze mezi prvky vlevo a x nebo y zůstávají nezměněny. Inverze mezi x nebo y a prvky vpravo zůstávají nezměněny. Inverze mezi x nebo y a prvky uvnitř po dvou vznikají nebo zanikají nebo se nemění. Inverze mezi x a y vznikne nebo zanikne.

Důsledek: Znaménko permutace poznáme podle počtu *transpozic* (jednoho prohození dvou prvků), které je potřeba na permutaci provést, aby byla převedena na generickou permutaci.

Návrat k definici deterinantu

Definice: Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n,n}$ je čtvercová matice. Číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\text{permutace } \pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

- Užitečná je představa šachových věží.
- Příklad pro matice typu $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ … Sarrusovo pravidlo.
- Pozor, pro matice větších typů Sarrusovo pravidlo nelze použít!

Determinant horní trojúhelníkové matice

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n-1}, & a_{1,n} \\ 0, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n-1}, & a_{2,n} \\ 0, & 0, & \ldots, & a_{3,n-1}, & a_{3,n} \\ & & \vdots & & \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

je roven součinu prvků na diagonále: $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdots a_{n,n}$.

Vidí všichni proč?

Základní vlastnosti determinantu

- Prohození řádků změní znaménko determinantu
- Matice se dvěma stejnými řádky má nulový determinant
- Pronásobení jediného řádku α-krát zvětší α-krát i determinant
- Je-li jeden řádek zapsaný jakou součet dvou částí, pak determinat takové matice je roven součtu determinantů matic, ve kterých jsou místo tohoto řádku jen jeho části:

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \overrightarrow{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \overrightarrow{b}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \overrightarrow{a}_i + \overrightarrow{b}_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

- Třetí typ kroku eliminační metody nezmění determinant.

Metoda výpočtu determinantu

Algoritmus: Eliminací převedeme danou matici $\mathbf{A}$ na horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$. Pokud během eliminace použijeme první nebo druhý typ kroku eliminace, je potřeba si poznamenat, jak se změnil determinant. Třetí typ kroku nemění determinant vůbec. Konečně $\det \mathbf{U}$ je součin prvků na diagonále.

Složitost algoritmu: n^3. Výrazná úspora proti vzorci v definici, který ma složitost $n!$.

Příklad

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & -6 & -11 & -10 \\ 0 & -5 & -7 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 30 & 42 & 48 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & -2 \end{vmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -65 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 16.
$$

Za chvíli uvidíme, že to lze spočítat jednodušeji…

Řádky a sloupce jedno jest

Tvrzení: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

Důkaz: Mám permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ a podle ní provedu sloupcový výběr prvků matice a vynásobím mezi sebou:

$$a_{i_1,1} \cdot a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} = a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

Součin reálných čísel je komutativní, tak jsem činitele uspořádal podle velikosti řádkového indexu. Jaký je vztah mezi permutacemi: $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ a $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$? Jsou si vzájmně inverzní. A inverzní permutace mají stejné znaménko. Takže vzorce s řádkovým i sloupcovým výběrem dávají stejný výsledek.

Důsledek: Při eliminaci za účelem výpočtu determinantu lze libovolně přecházet mezi řádkovými a sloupcovými úpravami.

Regulární a singulární matice

Věta: Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz: $\mathbf{A}$ je regulární právě když $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$. Dále si stačí uvědomit, že Gaussova eliminace nemění *nulovost* determinantu.

Determinant součinu matic

Věta: Pro dvě čtvercové matice typu (n, n) platí

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}).$$

Důkaz*: Lze provést $\mathbf{A} \sim \mathbf{U}_1$ řádkovými eliminačními úpravami, aby se nezměnil determinant. Dále lze převést $\mathbf{B}$ na $\mathbf{U}_2$ sloupcovými eliminačními úpravami tak, že se nezmění determinant. Snadno se ukáže, že

$$\det(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2) = (\det \mathbf{U}_1) \cdot (\det \mathbf{U}_2)$$

Existují matice $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ tak, že $\mathbf{U}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{B}\mathbf{P}_2$. Stejné řádkové i sloupcové úpravy provedeme na $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, tedy $\mathbf{P}_1\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{P}_2 = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2$. Úpravy nemění determinant, takže

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \det(\mathbf{P}_1\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{P}_2) = \det(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2) = \\ &= (\det \mathbf{U}_1) \cdot (\det \mathbf{U}_2) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Důsledky věty o determinantu součinu

- $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$
- Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ rozklad matice $\mathbf{A}$, pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{U}$, tedy $\det \mathbf{A}$ je roven součinu diagonálních prvků v matici $\mathbf{U}$.
  (připomínám, že matice $\mathbf{L}$ má na diagonále jedničky).

Rozvoj determinantu podle řádku

Terminologie: Vyřadíme-li ze čtvercové matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n,n}$ i-tý řádek a j-tý sloupec, dostáváme matici $\mathbf{A}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n-1,n-1}$. Číslo

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{i,j}$$

se nazývá *doplněk matice* **A** *v pozici* (i,j).

Věta o rozvoji: Nechť $D_{i,j}$ jsou doplňky čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = a_{r,1} D_{r,1} + a_{r,2} D_{r,2} + \cdots + a_{r,n} D_{r,n}.$$

Náznak důkazu: vytkněte ze součtu z definice determinantu $a_{r,1}$ (jen z těch sčítanců, kde se $a_{r,1}$ vyskytuje), dále vytkněte $a_{r,2}$ atd. až $a_{r,n}$. V závorkách po vytknutí dostanete $D_{r,i}$.

Rozjímání nad větou o rozvoji

- Protože $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$, platí analogická věta o rozvoji podle sloupce
- Je-li v řádku/sloupci hodně nul, je v součtu podle věty o rozvoji hodně nulových sčítanců. Stačí zapsat jen ty nenulové a redukovat výpočet determinantu matice typu (n,n) na několik (málo) determinantů matic typu $(n-1,n-1)$.
- Pozor: rekurzivní volání výpočtu determinantu podle věty o rozvoji má složitost $n!$, takže tento algoritmus je nepoužitelný.
- Důsledkem věty o rozvoji je tvrzení:

  $$0 = a_{r,1} D_{k,1} + a_{r,2} D_{k,2} + \cdots + a_{r,n} D_{k,n} \quad \text{pro } r \neq k.$$

  Stačí provést větu o rozvoji na matici se dvěma stejnými řádky.
- Věta o rozvoji má řadu dalších teoretických důsledků, některé se dozvíme později…

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 = 16.$$

Inverzní matice pomocí doplňků

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n,n}$ regulární, pak

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{D}^T,$$

kde $\mathbf{D} = (D_{i,j})$ je matice doplňků $\mathbf{A}$ v pozicích (i, j).

Důkaz: Ověříme, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.
Označíme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{D}^T = (D_{k,j})$, $\mathbf{E} = (e_{i,k})$.

$$e_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{1}{\det \mathbf{A}} D_{k,j} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (a_{i,1}D_{k,1} + a_{i,2}D_{k,2} + \cdots + a_{i,n}D_{k,n}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A} = 1 & \text{pro } i = k, \\ \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot 0 = 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Využili jsme větu o rozvoji determinantu podle i-tého řádku.

Příklad: inverze k matici typu $(2,2)$

Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matice doplňků k této matici je

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Takže

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{D}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad: inverze matice pomocí doplňků

Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Matice doplňků je:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

takže: $\det \mathbf{A} = -2$, $\quad \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{D}^T = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.