Báze

- Každý lineární (pod)prostor má svou bázi
- Vzhledem ke zvolené bázi určujeme souřadnice vektorů…

Definice báze

Definice: Množina vektorů B je *báze* lineárního prostoru L, pokud

(1) B je lineárně nezávislá,

(2) $\langle B\rangle = L$.

Podobně definujeme bázi lineárního podprostoru $P \subseteq L$.

Příklady bází

- $\{(1,2,3),\ (4,7,8),\ (3,4,2)\}$ je báze $\mathbf{R}^3$.
- $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ je také báze $\mathbf{R}^3$.
- $\{(1,0,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,0,\ldots,1)\}$ je báze $\mathbf{R}^n$.
- libovolné tři lineárně nezávislé orientované úsečky tvoři bázi lineárního prostoru všech orientovaných úseček.
- libovolné dvě lineárně nezávislé orientované úsečky v rovině tvoří bázi lineárního podprostoru orientovaných úseček ležících v této rovině.
- Množina $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ tvoří bázi lin. prostoru všech polynomů.

Pozorování: Jeden lineární (pod)prostor má více bází, všechny mají společnou vlastnost: mají stejný počet prvků. (To dokážeme za chvíli.)

Existence báze

Věta:

- Každý netriviální lineární prostor má bázi.
- Každá lineárně nezávislá množina se dá doplnit na bázi.
- V každé množině, pro kterou $\langle M \rangle = L$, se dá najít podmnožina, která tvoří bázi L.

Důkaz: opírá se o axiom výběru. Důkaz najdete ve druhém vydání linal2.pdf, ale nebudu jej požadovat ke zkoušce.

Pozorování: Je-li báze konečná, pak se dá lin. nezávislá množina doplnit na bázi postupným přidáváním vektorů z vnějšku lineárního obalu (použije se věta ze slídu [16]).

Stejný počet prvků v bázi

Věta 1: Dvě báze stejného lineárního prostoru mají stejný počet prvků.

Důkaz: pomocí tzv. Steinitzovy věty o výměně:

Věta (Steinitz): Nechť M je libovolná množina, N je konečná lineárně nezávislá množina vektorů tak, že $N \subseteq \langle M \rangle$. Pak lze z množiny M odebrat tolik vektorů, kolik jich je v N, a přidat tam všechny vektory z N. Nově vzniklá množina má stejný lineární obal jako $\langle M \rangle$. (Důkaz Steintzovy věty: viz linal.pdf.)

Důkaz věty 1: Nechť B_1 a B_2 jsou dvě báze. Protože B_1 je lin. nezávislá a $B_1 \subseteq \langle B_2 \rangle$, má podle Steinitzovy věty B_1 nejvýše tolik vektorů jako B_2. Je také B_2 lin. nezávislá a $B_2 \subseteq \langle B_1 \rangle$, takže počet vektorů je stejný.

Dimenze

Definice: Počet prvků báze lineárního prostoru L je *dimenze* L, značíme $\dim L$.

Pozorování: Předchozí věta nám zaručuje, že definice má smysl.

Příklady:

- $\dim \mathbf{R}^n = n$,
- dimenze prostoru polynomů je ∞,
- dimenze prostoru orientovaných úseček je 3,
- dim. podprostoru orientovaných úseček ve společné rovině je 2,
- dim. podprostoru orientovaných úseček ve společné přímce je 1,

Dimenze podprostoru

Dimenze podprostoru je menší nebo rovna dimenzi prostoru.

(Důkaz: Bázi podprostoru lze doplnit na bázi prostoru.)

V případě konečné dimenze a vlastního podporostoru je dimenze podprostoru menší.

(Důkaz: K bázi podprostoru přidáme vektor z vnějšku podprostoru. Tím zůstane množina lin. nezávislá. Případně ji doplníme na bázi prostoru.)

Podmínka konečnosti dimenze je nutná: Například prostor polynomů, i podprostor $\langle 1, x^2, x^4, \ldots \rangle$ mají stejnou dimenzi ∞.

Rovnost obalů

Dva obaly $\langle U\rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\rangle$ a $\langle V\rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\rangle$ se rovnají, právě když

$$\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\rangle = \dim\langle U\rangle = \dim\langle V\rangle.$$

Důkaz*: Nechť $\langle U\rangle = \langle V\rangle$, Pak $U \subseteq \langle U\rangle$, $V \subseteq \langle V\rangle = \langle U\rangle$, takže $U \cup V \subseteq \langle U \cup V\rangle = \langle V\rangle = \langle U\rangle$, tj. $\dim\langle U \cup V\rangle = \dim\langle V\rangle = \dim\langle U\rangle$.

Nechť nyní $\dim\langle U \cup V\rangle = \dim\langle V\rangle = \dim\langle U\rangle$. Protože $\langle U\rangle \subseteq \langle U \cup V\rangle$, ale mají stejné dimenze, musí se podprostor $\langle U\rangle$ rovnat lineárnímu prostoru $\langle U \cup V\rangle$.

Počet prvků lineárně nezávislé množiny

Nechť $\dim L = n$, $M \subseteq L$, počet prvků M je m. Potom:

- Je-li M lin. nezávislá, pak $m \le n$.
- Je-li $m > n$, pak je M lineárně závislá.
- Je-li $m = n$ a M je nezávislá, pak $\langle M \rangle = L$.
- Je-li $m = n$ a $\langle M \rangle = L$, pak M je nezávislá.
- Je-li M je nezávislá a $\langle M \rangle = L$, pak $m = n$.

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Na co máme bázi? Abychom vzhledem k ní mohli přidělit každému vektoru uspořádanou n-tici čísel, tzv. *souřadnice vektoru*.

Definice: Souřadnice vektoru $\overrightarrow{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n$ jsou uspořádaná n-tice reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taková, že

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1 \overrightarrow{b}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{b}_2 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{b}_n.$$

Existence souřadnic pro každý $\overrightarrow{x} \in L$? Protože $\langle B \rangle = L$.

Jednoznačnost souřadnic? Protože B je lineárně nezávislá.

Příklady

Vzhledem k bázi $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ má vektor $\overrightarrow{x} = (a,b,c)$ souřadnice (a,b,c).

Vzhledem k bázi $(1,x,x^2)$ má vektor ax^2+bx+c souřadnice (c,b,a).

Vzhledem k bázi $x^2+2, 2x, x-1$ má vektor ax^2+bx+c souřadnice:

$$\left(a,\ \frac{-2a+b+c}{2},\ 2a-c\right).$$

Souřadnice vektorů vzhledem k bázi v prostoru orientovaných úseček zjistíme geometricky.

Standardní báze v $\mathbf{R}^n$

je báze $((1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1))$.

Má zajímavou vlastnost: vzhledem k ní má vektor $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ souřadnice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Protože

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,0,\ldots,1).$$