

Báze

- Každý lineární (pod)prostor má svou bázi
- Vzhledem ke zvolené bázi určujeme souřadnice vektorů...

Definice báze

Definice: Množina vektorů B je *báze* lineárního prostoru L , pokud

- (1) B je lineárně nezávislá,
- (2) $\langle B \rangle = L$.

Podobně definujeme bázi lineárního podprostoru $P \subseteq L$.

Příklady bází

- $\{(1, 2, 3), (4, 7, 8), (3, 4, 2)\}$ je báze \mathbf{R}^3 .
- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ je také báze \mathbf{R}^3 .
- $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$ je báze \mathbf{R}^n .
- libovolné tři lineárně nezávislé orientované úsečky tvoří bázi lineárního prostoru všech orientovaných úseček.
- libovolné dvě lineárně nezávislé orientované úsečky v rovině tvoří bázi lineárního podprostoru orientovaných úseček ležících v této rovině.
- Množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ tvoří bázi lin. prostoru všech polynomů.

Pozorování: Jeden lineární (pod)prostor má více bází, všechny mají společnou vlastnost: mají stejný počet prvků. (To dokážeme za chvíli.)

Existence báze

Věta:

- Každý netriviální lineární prostor má bázi.
- Každá lineárně nezávislá množina se dá doplnit na bázi.
- V každé množině, pro kterou $\langle M \rangle = L$, se dá najít podmnožina, která tvoří bázi L .

Důkaz: opírá se o axiom výběru. Důkaz najdete ve druhém vydání `linal2.pdf`, ale nebudu jej požadovat ke zkoušce.

Pozorování: Je-li báze konečná, pak se dá lin. nezávislá množina doplnit na bázi postupným přidáváním vektorů z vnějšku lineárního obalu (použije se věta ze slídu [16]).

Stejný počet prvků v bázi

Věta 1: Dvě báze stejného lineárního prostoru mají stejný počet prvků.

Důkaz: pomocí tzv. Steinitzovy věty o výměně:

Věta (Steintz): Nechť M je libovolná množina, N je konečná lineárně nezávislá množina vektorů tak, že $N \subseteq \langle M \rangle$. Pak lze z množiny M odebrat tolik vektorů, kolik jich je v N , a přidat tam všechny vektory z N . Nově vzniklá množina má stejný lineární obal jako $\langle M \rangle$. (Důkaz Steintzovy věty: viz linal.pdf.)

Důkaz věty 1: Nechť B_1 a B_2 jsou dvě báze. Protože B_1 je lin. nezávislá a $B_1 \subseteq \langle B_2 \rangle$, má podle Steinitzovy věty B_1 nejvýše tolik vektorů jako B_2 . Je také B_2 lin. nezávislá a $B_2 \subseteq \langle B_1 \rangle$, takže počet vektorů je stejný.

Dimenze

Definice: Počet prvků báze lineárního prostoru L je *dimenze* L , značíme $\dim L$.

Pozorování: Předchozí věta nám zaručuje, že definice má smysl.

Příklady:

- $\dim \mathbf{R}^n = n$,
- dimenze prostoru polynomů je ∞ ,
- dimenze prostoru orientovaných úseček je 3,
- dim. podprostoru orientovaných úseček ve společné rovině je 2,
- dim. podprostoru orientovaných úseček ve společné přímce je 1,

Dimenze podprostoru

Dimenze podprostoru je menší nebo rovna dimenzi prostoru.

(Důkaz: Bázi podprostoru lze doplnit na bázi prostoru.)

V případě konečné dimenze a vlastního podprostoru je dimenze podprostoru menší.

(Důkaz: K bázi podprostoru přidáme vektor z vnějšku podprostoru. Tím zůstane množina lin. nezávislá. Případně ji doplníme na bázi prostoru.)

Podmínka konečnosti dimenze je nutná: Například prostor polynomů, i podprostor $\langle 1, x^2, x^4, \dots \rangle$ mají stejnou dimenzi ∞ .

Rovnost obalů

Dva obaly $\langle U \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle$ a $\langle V \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$ se rovnají, právě když

$$\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle = \dim\langle U \rangle = \dim\langle V \rangle.$$

Důkaz*: Nechť $\langle U \rangle = \langle V \rangle$, Pak $U \subseteq \langle U \rangle$, $V \subseteq \langle V \rangle = \langle U \rangle$, takže $U \cup V \subseteq \langle U \cup V \rangle = \langle V \rangle = \langle U \rangle$, tj. $\dim\langle U \cup V \rangle = \dim\langle V \rangle = \dim\langle U \rangle$.

Nechť nyní $\dim\langle U \cup V \rangle = \dim\langle V \rangle = \dim\langle U \rangle$. Protože $\langle U \rangle \subseteq \langle U \cup V \rangle$, ale mají stejné dimenze, musí se podprostor $\langle U \rangle$ rovnat lineárnímu prostoru $\langle U \cup V \rangle$.

Počet prvků lineárně nezávislé množiny

Nechť $\dim L = n$, $M \subseteq L$, počet prvků M je m . Potom:

- Je-li M lin. nezávislá, pak $m \leq n$.
- Je-li $m > n$, pak je M lineárně závislá.
- Je-li $m = n$ a M je nezávislá, pak $\langle M \rangle = L$.
- Je-li $m = n$ a $\langle M \rangle = L$, pak M je nezávislá.
- Je-li M je nezávislá a $\langle M \rangle = L$, pak $m = n$.

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Na co máme bázi? Abychom vzhledem k ní mohli přidělit každému vektoru uspořádanou n -tici čísel, tzv. *souřadnice vektoru*.

Definice: Souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k uspořádané bázi $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ jsou uspořádaná n -tice reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taková, že

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n.$$

Existence souřadnic pro každý $\vec{x} \in L$? Protože $\langle B \rangle = L$.

Jednoznačnost souřadnic? Protože B je lineárně nezávislá.

Příklady

Vzhledem k bázi $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ má vektor $\vec{x} = (a, b, c)$ souřadnice (a, b, c) .

Vzhledem k bázi $(1, x, x^2)$ má vektor $ax^2 + bx + c$ souřadnice (c, b, a) .

Vzhledem k bázi $x^2 + 2, 2x, x - 1$ má vektor $ax^2 + bx + c$ souřadnice:

$$\left(a, \frac{-2a + b + c}{2}, 2a - c \right).$$

Souřadnice vektorů vzhledem k bázi v prostoru orientovaných úseček zjistíme geometricky.

Standardní báze v \mathbf{R}^n

je báze $((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$.

Má zajímavou vlastnost: vzhledem k ní má vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ souřadnice (x_1, x_2, \dots, x_n) . Protože

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1).$$