

Afinní transformace

- je posunutí plus lineární transformace
- má svou matici vzhledem k homogenním souřadnicím
- využití například v počítačové grafice

Idea afinního prostoru

- Lineární prostor V volných vektorů: dvě orientované úsečky reprezentují stejný volný vektor, pokud jsou rovnoběžné, stejně velké a stejně orientované.
- Sčítání a násobení konstantou v lineárním prostoru V provedeme pomocí vhodně zvolených reprezentantů stejně jako v U_O .
- Kromě vektorů z V budeme v afinním prostoru pracovat s množinou bodů \mathbf{X} . Nové operace:
- $\text{bod1} + \text{vektor} = \text{bod2}$. Na bod1 navážeme reprezentanta vektoru a koncový bod tohoto vektoru je výsledek operace.
- $\text{bod1} - \text{bod2} = \text{vektor}$. Výsledkem je vektor s reprezentantem, který má počáteční bod2 a koncový bod1.

Definice afinního prostoru

Definice: Nechť V je lineární prostor a \mathbf{X} je libovolná množina. Dvojici množin (\mathbf{X}, V) nazýváme *afinní prostor*, pokud kromě operací $+$ a \cdot na V je definována operace $+$: $\mathbf{X} \times V \rightarrow \mathbf{X}$ s vlastnostmi:

- (1) $P + \vec{0} = P \quad \forall P \in \mathbf{X}$ ($\vec{0} \in V$ je nulový vektor),
- (2) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \quad \forall P \in \mathbf{X}, \vec{u} \in V, \vec{v} \in V,$
- (3) $\forall P \in \mathbf{X}, Q \in \mathbf{X}$ existuje jediný $\vec{u} \in V$ tak, že $P = Q + \vec{u}$

Vektor \vec{u} z vlastnosti (3) značíme $P - Q$ nebo \overrightarrow{QP} .

Množina \mathbf{X} a lineární prostor V mohou být jakékoli takové, aby šlo definovat operaci $+$ s uvedenými vlastnostmi.

Dobrá a postačující představa afinního prostoru je lineární prostor V volných vektorů a množina \mathbf{X} bodů.

Souřadnicový systém afinního prostoru

Dimenze afinního prostoru je dimenze lineárního prostoru V .

Nadále budeme předpokládat afinní prostory s konečnou dimenzí (zejména s dimenzí 3 nebo 2).

Zvolme bázi (B) prostoru V a dále bod $O \in \mathbf{X}$. Dvojici (O, B) nazýváme souřadnicovým systémem afinního prostoru.

Vektor $\vec{u} \in V$ má souřadnice vzhledem k (O, B) definovány jako jeho souřadnice vzhledem k bázi (B) .

Bod $P \in \mathbf{X}$ má souřadnice vzhledem k (O, B) definovány jako souřadnice vektoru \overrightarrow{OP} . Tomuto vektoru říkáme *radiusvektor bodu P* .

Vlastnosti souřadnic v afinním prostoru

Nechť C je zobrazení souřadnic, $\vec{u}, \vec{v} \in V, P, Q \in \mathbf{X}, \alpha \in \mathbf{R}$. Pak

$$(1) C(\vec{u} + \vec{v}) = C(\vec{u}) + C(\vec{v})$$

$$(2) C(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot C(\vec{u})$$

$$(3) C(Q + \vec{u}) = C(Q) + C(\vec{u})$$

$$(4) C(P - Q) = C(P) - C(Q)$$

Důkaz: (1) a (2): jsou to obvyklé souřadnice vektoru. (3), (4): stačí souřadnice bodů vyjádřit jako souřadnice jejich radiusvektorů.

Homogenní souřadnice

Nechť má afinní prostor dimenzi n .

Homogenní souřadnice vektoru v souřadnicovém systému (O, B) je uspořádaná $(n + 1)$ -tice; prvních n složek obsahuje souřadnice vektoru, poslední složka obsahuje nulu.

Homogenní souřadnice bodu v souřadnicovém systému (O, B) je uspořádaná $(n + 1)$ -tice; prvních n složek obsahuje souřadnice bodu, poslední složka obsahuje jedničku.

Pozorování: Tvrzení z předchozí strany [5] o souřadnicích platí i v případě, že C značí homogenní souřadnice.

Matice v homogenních souřadnicích

Zobrazení $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, pro které existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n+1,n+1}$ s vlastností:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } P \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } A(P) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix}$$

se nazývá transformace s maticí \mathbf{A} v homogenních souřadnicích.

Pozorování: Matice \mathbf{A} musí být tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}' \in \mathbf{R}^{n,n}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n,1}$, $\mathbf{o} \in \mathbf{R}^{1,n}$ je nulový vektor.

Vlastnosti matice v homogenních souřadnicích

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{p} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj. bod je transformován lineární transformací s maticí \mathbf{A}' a následně posunut o \mathbf{t} .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

tj. vektor je pouze transformován lineární transformací s maticí \mathbf{A}' .

Příklad 2D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je tedy určena šesti parametry.

Bod se souřadnicemi (x, y) přejde při transformaci s touto maticí na bod se souřadnicemi (x', y') :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{pmatrix},$$

takže bod se transformuje lineárně a posune o vektor (c, f) .

Příklad 3D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je určena dvanácti parametry.

Transformace bodu probíhá podle následujícího vzorce:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skládání transformací — součin matic

Věta: Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou matice transformací A a B v homogenních souřadnicích

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Pak složená transformace $B \circ A$ má matici:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Je $(B \circ A)(x) = (B(A(x)))$.

Důkaz věty se provede analogicky, jako důkaz věty o složeném lineárním zobrazení.

Inverzní transformace — inverzní matice

Věta: Má-li transformace A regulární matici \mathbf{A} v homogenních souřadnicích, pak je prostá a na A^{-1} má matici \mathbf{A}^{-1} v homogenních souřadnicích.

Pozorování:

$$\text{Je-li } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pak } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}')^{-1} & -(\mathbf{A}')^{-1} \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k \mathbf{A} existuje, právě když \mathbf{A}' je regulární.

Příklad: elementární transformace ve 2D

Změna měřítka má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace o úhel α má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Posunutí o vektor se souřadnicemi (t_x, t_y) má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další transformace vznikají skládáním těchto transformací.

Příklad

Najdeme matici (v homogenních souřadnicích) rotace o úhel α kolem bodu $(2, 3)$.

Uvedená transformace je složením následujících transformací:

- posunutí o vektor $(-2, 3)$,
- rotace o úhel α ,
- posunutí o vektor $(2, 3)$.

Matice výsledné transformace je součinem matic:

$$\begin{aligned}
 & (\text{posunutí o } (2, 3)) \cdot (\text{rotace o úhel } \alpha) \cdot (\text{posunutí o } (-2, -3)) = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots
 \end{aligned}$$

Příklad, pokračování

$$\dots = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 2 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže bod o souřadnicích (x, y) přechází po této transformaci na bod o souřadnicích (x', y') , pro který platí:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 2 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \alpha)x - (\sin \alpha)y - 2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 2 \\ (\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y - 2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afinní transformace

Definice: Nechť (\mathbf{X}, V) je afinní prostor. Transformace $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ se nazývá *afinní*, pokud existuje lineární transformace $A' : V \rightarrow V$ tak, že

$$A(P + \vec{u}) = A(P) + A'(\vec{u}) \quad \forall P \in \mathbf{X}, \vec{u} \in V.$$

Zvolme bod $O \in \mathbf{X}$. Protože pro každý $P \in \mathbf{X}$ platí $P = O + \vec{OP}$, je $A(P) = A(O) + A'(\vec{OP})$, takže každá afinní transformace je jednoznačně určena hodnotou $A(O)$ a lineární transformací $A' : V \rightarrow V$.

Protože každá lineární transformace $A' : V \rightarrow V$ je jednoznačně určena hodnotami na bázi $(B) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, je každá afinní transformace jednoznačně určena hodnotami v $n + 1$ bodech:

$$O, \quad O + \vec{b}_1, \quad O + \vec{b}_2, \quad \dots, \quad O + \vec{b}_n.$$

Matrice afinní transformace

je její matice v homogenních souřadnicích. Je třeba ukázat:

- Každá transformace, která má matici v homogenních souřadnicích, je afinní.
- Každá afinní transformace má matici v homog. souřadnicích.

Puntík první: Je dána matice \mathbf{A} nějaké transformace v homogenních souřadnicích vzhledem k (O, B) . Matice hledaného zobrazení A' je také matice \mathbf{A} . Jsou-li \mathbf{p} souřadnice bodu $P \in \mathbf{X}$ a \mathbf{u} souřadnice vektoru $\vec{u} \in V$, pak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puntík druhý: Hledaná matice obsahuje ve sloupcích homogenní souřadnice obrazů báze následované homogenními souřadnicemi obrazu bodu O . Taková matice určuje hodnoty afinní transformace na bodech $O, O + \vec{b}_i$, takže určuje afinní transformaci jednoznačně.

Vlastnosti afinní transformace

- Skládání afinních transformací je afinní transformace
- Afinní transformace je prostá právě když je na právě když má regulární matici v homogenních souřadnicích.
- Je-li afiní transformace prostá, pak její inverze je také afiní transformace.
- Prostá afinní transformace zobrazuje rovnoběžné přímky na rovnoběžné přímky.

Příklad

Je dána afinní transformace ve 2D prostoru taková, že posune počátek souřadnicového systému do bodu (3, 2) a transformuje první báze vektor na vektor se souřadnicemi (-1, 2), druhý báze vektor transformuje na vektor se souřadnicemi (4, 1).

Najdeme matici v homogenních souřadnicích této transformace.

Podle předchozího matice obsahuje homogenní souřadnice obrazů báze a v posledním sloupci homogenní souřadnice obrazu počátku.

Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pronásobíme-li pixelové souřadnice každého pixelu touto maticí, dostáváme pixelové souřadnice obrazu: maticovým násobením můžeme transformovat dvourozměrný obrázek.