Afinní transformace

- je posunutí plus lineární transformace
- má svou matici vzhledem k homogenním souřadnicím
- využití například v počítačové grafice

a) afinita, 13, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010, d) BI-LIN, e) L, f) 2009/2010, g) . Viz p. d. 4/2010

Idea afinního prostoru

- Lineární prostor V volných vektorů: dvě orientované úsečky reprezentují stejný volný vektor, pokud jsou rovnoběžné, stejně velké a stejně orientované.
- Sčítání a násobení konstantou v lineárním prostoru V provedeme pomocí vhodně zvolených reprezentatnů stejně jako v U_O.
- Kromě vektorů z V budeme v afinním prostoru pracovat s množinou bodů $\mathbf{X}$. Nové operace:
- bod1 + vektor = bod2. Na bod1 navážeme reprezentanta vektoru a koncový bod tohoto vektoru je výsledek operace.
- bod1 – bod2 = vektor. Výsledkem je vektor s reprezentantem, který má počáteční bod2 a koncový bod1.

Definice afinního prostoru

Definice: Nechť V je lineární prostor a $\mathbf{X}$ je libovolná množina. Dvojici množin $(\mathbf{X}, V)$ nazýváme *afinní prostor*, pokud kromě operací + a $\cdot$ na V je definována operace $+ : \mathbf{X} \times V \to \mathbf{X}$ s vlastnostmi:

(1) $P + \overrightarrow{o} = P \qquad \forall\, P \in \mathbf{X}$ ($\overrightarrow{o} \in V$ je nulový vektor),

(2) $(P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \qquad \forall\, P \in \mathbf{X},\ \overrightarrow{u} \in V,\ \overrightarrow{v} \in V$,

(3) $\forall\, P \in \mathbf{X}, Q \in \mathbf{X}$ existuje jediný $\overrightarrow{u} \in V$ tak, že $\quad P = Q + \overrightarrow{u}$

Vektor $\overrightarrow{u}$ z vlastnosti (3) značíme $P - Q$ nebo $\overrightarrow{QP}$.

Množina $\mathbf{X}$ a lineární prostor V mohou být jakékoli takové, aby šlo definovat operaci + s uvedenými vlastnostmi.

Dobrá a postačující představa afinního prostoru je lineární prostor V volných vektorů a množina $\mathbf{X}$ bodů.

Souřadnicový systém afinního prostoru

Dimenze afinního prostoru je dimenze lineárního prostoru V.

Nadále budeme předpokládat afinní prostory s konečnou dimenzí (zejména s dimenzí 3 nebo 2).

Zvolme bázi (B) prostoru V a dále bod $O \in \mathbf{X}$. Dvojici (O, B) nazýváme souřadnicovým systémem afinního prostoru.

Vektor $\overrightarrow{u} \in V$ má souřadnice vzhledem k (O, B) definovány jako jeho souřadnice vzhledem k bázi (B).

Bod $P \in \mathbf{X}$ má souřadnice vzhledem k (O, B) definovány jako souřadnice vektoru $\overrightarrow{OP}$. Tomuto vektoru říkáme *radiusvektor bodu* P.

Vlastnosti souřadnic v afinním prostoru

Nechť C je zobrazení souřadnic, $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $P, Q \in \mathbf{X}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad C(\vec{u} + \vec{v}) = C(\vec{u}) + C(\vec{v})\\
&(2)\quad C(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot C(\vec{u})\\
&(3)\quad C(Q + \vec{u}) = C(Q) + C(\vec{u})\\
&(4)\quad C(P - Q) = C(P) - C(Q)
\end{aligned}
$$

Důkaz: (1) a (2): jsou to obvyklé souřadnice vektoru. (3), (4): stačí souřadnice bodů vyjádřit jako souřadnice jejich radiusvektorů.

Homogenní souřadnice

Nechť má afinní prostor dimenzi n.

Homogenní souřadnice vektoru v souřadnicovém systému (O, B) je uspořádaná $(n + 1)$-tice; prvních n složek obsahuje souřadnice vektoru, poslední složka obsahuje nulu.

Homogenní souřadnice bodu v souřadnicovému systému (O, B) je uspořádaná $(n + 1)$-tice; prvních n složek obsahuje souřadnice bodu, poslední složka obsahuje jedničku.

Pozorování: Tvrzení z předchozí strany [5] o souřadnicích platí i v případě, že C značí homogenní souřadnice.

Matice v homogenních souřadnicích

Zobrazení $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, pro které existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n+1,n+1}$ s vlastností:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } P \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } A(P) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix}$$

se nazývá transformace s maticí $\mathbf{A}$ v homogenních souřadnicích.

Pozorování: Matice $\mathbf{A}$ musí být tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}' \in \mathbf{R}^{n,n}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n,1}$, $\mathbf{o} \in \mathbf{R}^{1,n}$ je nulový vektor.

Vlastnosti matice v homogenních souřadnicích

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{p} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj. bod je transformován lineární transformací s maticí $\mathbf{A}'$ a následně posunut o $\mathbf{t}$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

tj. vektor je pouze transformován lineární transformací s maticí $\mathbf{A}'$.

Příklad 2D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je tedy určena šesti parametry.

Bod se souřadnicemi (x, y) přejde při transformaci s touto maticí na bod se souřadnicemi (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{pmatrix},$$

takže bod se transformuje lineárně a posune o vektor (c, f).

Příklad 3D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je určena dvanácti parametry.

Transformace bodu probíhá podle následujícího vzorce:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skládání transformací — součin matic

Věta: Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice transformací A a B v homogenních souřadnicích

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Pak složená transformace $B \circ A$ má matici:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Je $(B \circ A)(x) = (B(A(x))$.

Důkaz věty se provede analogicky, jako důkaz věty o složeném lineárním zobrazení.

Inverzní transformace — inverzní matice

Věta: Má-li transformace A regulární matici $\mathbf{A}$ v homogenních souřadnicích, pak je prostá a na a A^{-1} má matici $\mathbf{A}^{-1}$ v homogenních souřadnicích.

Pozorování:

$$\text{Je-li}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pak}\quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}')^{-1} & -(\mathbf{A}')^{-1}\,\mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k $\mathbf{A}$ existuje, právě když $\mathbf{A}'$ je regulární.

Příklad: elementární transformace ve 2D

Změna měřítka má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace o úhel α má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Posunutí o vektor se souřadnicemi (t_x, t_y) má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další transformace vznikají skládáním těchto transformací.

Příklad

Najdeme matici (v homogenních souřadnicích) rotace o úhlel α kolem bodu $(2,3)$.

Uvedená transformace je složením následujících transformací:

- posunutí o vektor $(-2,-3)$,
- rotace o úhel α,
- posunutí o vektor $(2,3)$.

Matice výsledné transformace je součinem matic:

$$\big(\text{posunutí o } (2,3)\big) \cdot \big(\text{rotace o úhel } \alpha\big) \cdot \big(\text{posunutí o } (-2,-3)\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

Příklad, pokračování

$$\cdots = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže bod o souřadnicích (x, y) přechází po této transformaci na bod o souřadnicích $(x'y')$, pro který platí:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y - 2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y - 2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Afinní transformace

Definice: Nechť $(\mathbf{X}, V)$ je afinní prostor. Transformace $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ se nazývá *afinní*, pokud existuje lineární transformace $A' : V \to V$ tak, že

$$A(P + \overrightarrow{u}) = A(P) + A'(\overrightarrow{u}) \qquad \forall\, P \in \mathbf{X}, \overrightarrow{u} \in V.$$

Zvolme bod $O \in \mathbf{X}$. Protože pro každý $P \in \mathbf{X}$ platí $P = O + \overrightarrow{OP}$, je $A(P) = A(O) + A'(\overrightarrow{OP})$, takže každá afinní transformace je jednoznačně určena hodnotou $A(O)$ a lineární transformací $A' : V \to V$.

Protože každá lineární transformace $A' : V \to V$ je jednoznačně určena hodnotami na bázi $(B) = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n)$, je každá afinní transformace jednoznačně určena hodnotami v $n + 1$ bodech:

$$O, \quad O + \overrightarrow{b}_1, \quad O + \overrightarrow{b}_2, \quad \ldots, \quad O + \overrightarrow{b}_n.$$

Matice afinní transformace

je její matice v homogenních souřadnicích. Je třeba ukázat:

- Každá transformace, která má matici v homogenních souřadnicích, je afinní.
- Každá afinní transformace má matici v homog. souřadnicích.

Puntík první: Je dána matice **A** nějaké transformace v homogenních souřadnicích vzhledem k (O, B). Matice hledaného zobrazení A' je také matice **A**. Jsou-li **p** souřadnice bodu $P \in \mathbf{X}$ a **u** souřadnice vektoru $\vec{u} \in V$, pak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}+\mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puntík druhý: Hledaná matice obsahuje ve sloupcích homogenní souřadnice obrazů báze následované homogenními souřadicemi obrazu bodu O. Taková matice určuje hodnoty afinní transformace na bodech $O, O + \vec{b}_i$, takže určuje afinní transformaci jednoznačně.

Vlastnosti afinní transformace

- Skládání afinních transformací je afinní transformace
- Afinní transformace je prostá právě když je na právě když má regulární matici v homogenních souřadnicích.
- Je-li afiní transformace prostá, pak její inverze je také afiní transformace.
- Prostá afinní transformace zobrazuje rovnoběžné přímky na rovnoběžné přímky.

Příklad

Je dána afinní tansformace ve 2D prostoru taková, že posune počátek souřadnicového systému do bodu $(3, 2)$ a transformuje první bázový vektor na vektor se souřadnicemi $(-1, 2)$, druhý bázový vektor transformuje na vektor se souřadnicemi $(4, 1)$.

Najdeme matici v homogenních souřadnicích této transformace.

Podle předchozího matice obsahuje homogenní souřadnice obrazů báze a v posledním sloupci homogenní souřadnice obrazu počátku. Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pronásobíme-li pixelové souřadnice každého pixelu touto maticí, dostáváme pixelové souřadnice obazu: maticovým násobením můžeme tansformovat dvourozměrný obrázek.