Afinní transformace

Stručnější verze

- je posunutí plus lineární transformace
- má svou matici vzhledem k homogenním souřadnicím
- body a vektory: afinní prostor
- využití například v počítačové grafice

a) afinita-v2, 13, b) P. Olšák, FEL ČVUT, c) P. Olšák 2010–13, d) BI-LIN, e) L, f) 2012/2013, g) . Viz p. d. 4/2010

Afinní transformace (zhruba)

Zjednodušená **definice**:

Afinní transformace na $\mathbf{R}^n$ je takové zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, pro které existuje vektor $\overrightarrow{t} \in \mathbf{R}^n$ a lineární transformace $A' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tak, že

$$A(\overrightarrow{x}) = A'(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{t} \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^n,$$

tj. A je složení lineární transformace a posunutí.

Pozorování: Pro $\overrightarrow{t} \neq \overrightarrow{o}$ není afinní transformace lineární transformací a tudíž nemá svou matici (jako lineární transformace).

Přidáme-li ale k matici jeden řádek a jeden sloupec, může tato matice reprezentovat afinní transformaci (viz další slídy).

Idea homogenních souřadnic (rámcově)

Zapišme $\overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^n$ (resp. $\overrightarrow{t} \in \mathbf{R}^n$) do sloupce $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{t}$). Nechť dále $\mathbf{A}'$ je matice lineární transformace $A' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$ (symbol $\mathbf{o}$ zde značí řádek nul)

platí:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek maticového násobení tedy obsahuje souřadnice obrazu afinního zobrazení $A(\overrightarrow{x}) = A'(x) + \overrightarrow{t}$.

Uvedenou matici $\mathbf{A}$ nazýváme *maticí afinního zobrazení A v homogenních souřadnicích*.

Body a vektory (inuitivně)

Z geometrického pohledu vektor udává směr a velikost směru, nikoli polohu. Nemá tedy smysl „posunovat“ vektory, prvky lineárního prostoru, pomocí afinní transformace.

Na druhou stranu v gemometrii jsou také *body*, které má smysl transformovat afinní transformací včetně posunu. Body mají souřadnice vymezené podobně jako souřadnice vektorů, tedy jejich souřadnice jsou prvky z $\mathbf{R}^n$.

Je obtížné přesně definovat bod jako „malé nic s nulovými rozměry“, ale je rozumné uvést axiomaticky vzájemnou souvislost (blíže nespecifikovaných) bodů a vektorů. To řeší následující definice afinního prostoru.

Afinní prostor

Nechť $\mathbf{X}$ je množina (bodů) a V je lineární prostor dimenze n. Na lineárním prostoru V jsou definovány operace $\cdot : \mathbf{R} \times V \to V$ a $+ : V \times V \to V$ splňující axiomy lineárního prostoru. Je-li navíc definována operace $+ : \mathbf{X} \times V \to \mathbf{X}$ (bod + vektor = bod), pro kterou platí: $\forall P \in \mathbf{X}, Q \in \mathbf{X}, \vec{u} \in V, \vec{v} \in V$ je

(1) $P + \vec{o} = P$, kde $\vec{o} \in V$ je nulový vektor,

(2) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$,

(3) existuje jediný vektor $\vec{w} \in V$ tak, že $Q = P + \vec{w}$,

pak se dvojice $(\mathbf{X}, V)$ nazývá *afinní prostor* dimenze n. Přitom $\mathbf{X}$ je množina *bodů* a V je množina *vektorů* tohoto afinního prostoru.

Poznámka: Vektor $\vec{w}$ z vlastnosti (3) značíme $\vec{w} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$. Odpovídá to operaci „bod – bod = vektor“.

Ilustrace afinního prostoru

V předchozí (axiomatické) definici není nutno vymezit, co to je „bod“, stačí, když tyto „objekty“ splňují vyjmenované axiomy. Nicméně je možné a velmi užitečné afinní prostor ilustrovat na základě intuitivního chápání pojmu bod v geometrickém prostoru:

Nechť $\mathbf{X}$ je geometrický prostor všech bodů. Jeden z nich zvolíme jako počátek O a pak všechny body $P \in \mathbf{X}$ jsou charakterizovány svým radiusevektorem: orientovanou úsečkou začínající v O a končící v P. Dále uvažujme lineární prostor U_O všech orietnovaných úseček začínajících v O (sčítání: doplňovaním na rovnoběžník, násobení: násobení délek vektorů). Dvojice $(\mathbf{X}, U_O)$ je afinní prostor.

Operace „bod + vektor = bod“, tedy $P + \overrightarrow{v} = Q$, je zavedena takto: sečteme radiusvektor bodu P s vektorem $\overrightarrow{v}$. Výsledný vektor je radiusvektorem hledaného bodu Q (udělejte si náčtrtek a ověřte si, že platí axiomy).

Souřadnice v afinním prostoru

Definice: Nechť $(\mathbf{X}, V)$ je afinní prostor. Zvolme $O \in \mathbf{X}$ a uspořádanou bázi (B) lineárního prostoru V. Dvojici (O, B) nazýváme *souřadným systémem* afinního prostoru $(\mathbf{X}, V)$ a vzhledem k tomtuto souřadnému systému jsou

- *souřadnice vektoru* $\vec{v} \in V$ definovány jako souřadnice tohoto vektoru vzhledem k uspořádané bázi (B) a
- *souřadnice bodu* $P \in \mathbf{X}$ jsou definovány jako souřadnice vektoru $P - O$ vzhledem k uspořádané bázi (B).

Poznámka: Je-li pevně dán souřadný systém, pak body i vektory v $(\mathbf{X}, V)$ ztotožňujeme s uspořádanými n-ticemi jejich souřadnic, tedy s prvky v $\mathbf{R}^n$. Sčítání souřadnic v $\mathbf{R}^n$ odpovídá nejen sčítání vektorů, ale i operacím „bod + vektor“.

Homogenní souřadnice

Homogenní souřadnice vektoru v souřadném systému (O, B) je uspořádaná $(n+1)$-tice; prvních n složek obsahuje souřadnice vektoru, poslední složka obsahuje nulu.

Homogenní souřadnice bodu v souřadnému systému (O, B) je uspořádaná $(n+1)$-tice; prvních n složek obsahuje souřadnice bodu, poslední složka obsahuje jedničku.

Pozorování: Tvrzení z předchozí strany [7] o souřadnicích z $\mathbf{R}^n$ platí i v případě, že sčítáme homogenní souřadnice z $\mathbf{R}^{n+1}$. Tento součet koresponuje i s operací „bod + vektor“.

Matice v homogenních souřadnicích

Nechť $(\mathbf{X}, V)$ je afinní prostor. Zobrazení $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, pro které existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n+1,n+1}$ s vlastností:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } P \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{homogenní} \\ \text{souřadnice} \\ \text{bodu } A(P) \\ \text{vzhledem} \\ \text{k } (O, B) \end{pmatrix}$$

se nazývá transformace s maticí $\mathbf{A}$ v homogenních souřadnicích.

Pozorování: Matice $\mathbf{A}$ musí být tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}' \in \mathbf{R}^{n,n}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n,1}$, $\mathbf{o} \in \mathbf{R}^{1,n}$ je nulový vektor, takže to je matice afinního zobrazení v homogenních souřadnicích.

Příklad 2D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je tedy určena šesti parametry.

Bod se souřadnicemi (x, y) přejde při transformaci s touto maticí na bod se souřadnicemi (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{pmatrix},$$

takže bod se transformuje lineárně a posune o vektor (c, f).

Příklad 3D

Obecná matice transformace v homogenních souřadnicích má tvar:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je určena dvanácti parametry.

Transformace bodu probíhá podle následujícího vzorce:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skládání transformací — součin matic

Věta: Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice transformací A a B v homogenních souřadnicích

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Pak složená transformace $B \circ A$ má matici:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Je $(B \circ A)(x) = (B(A(x))$.

Důkaz věty se provede analogicky, jako důkaz věty o složeném lineárním zobrazení.

Inverzní transformace — inverzní matice

Věta: Má-li transformace A regulární matici $\mathbf{A}$ v homogenních souřadnicích, pak je prostá a na a A^{-1} má matici $\mathbf{A}^{-1}$ v homogenních souřadnicích.

Pozorování:

$$\text{Je-li} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pak} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}')^{-1} & -(\mathbf{A}')^{-1}\,\mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k $\mathbf{A}$ existuje, právě když $\mathbf{A}'$ je regulární.

Příklad: elementární transformace ve 2D

Změna měřítka má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace o úhel α má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Posunutí o vektor se souřadnicemi (t_x, t_y) má matici v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další transformace vznikají skládáním těchto transformací.

Příklad

Najdeme matici (v homogenních souřadnicích) rotace o úhlel α kolem bodu $(2,3)$.

Uvedená transformace je složením následujících transformací:

- posunutí o vektor $(-2,-3)$,
- rotace o úhel α,
- posunutí o vektor $(2,3)$.

Matice výsledné transformace je součinem matic:

$$\big(\text{posunutí o } (2,3)\big) \cdot \big(\text{rotace o úhel } \alpha\big) \cdot \big(\text{posunutí o } (-2,-3)\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

Příklad, pokračování

$$\cdots = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže bod o souřadnicích (x, y) přechází po této transformaci na bod o souřadnicích $(x'y')$, pro který platí:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y - 2\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2 \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y - 2\sin\alpha - 3\cos\alpha + 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$